التمرين الأول

أحسب النهايات التالية

$\lim_{x\to\infty} 3x+\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$	$\lim_{x\to\infty} \ln(3x)-\ln(x+2)$	$\lim_{x\to\infty} x^2\ln x-3x+2$	$\lim_{x\to\infty} x^2-x-\ln x$
$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2+\ln x}$	$\lim_{x\to\infty}(\ln x)^2-2\ln x-1$	$\lim_{x\to\infty}2x-\sqrt{x}\ln x$	$\lim_{x\to\infty} x-(\ln x)^2$
$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{2}x-\sqrt{x}\ln x$	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(2x)-(x+1)\ln(x+1)$	$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}2x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x^2\ln x-2x+1$
$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\ln x}$	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x-\frac{1}{x}-2\ln x$	$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x-2}{\ln x}$	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{2}{\sqrt{x}}+\ln x$
$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x-\ln x}$	$\lim_{x\to\infty}2\ln(x-1)-\ln(x+2)$	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x+1}{x-2\ln x}$	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x-\frac{\ln x}{x}$
$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln x}{(x-1)^2}$	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}1+\ln x-\frac{\ln x}{x}$	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{2+\ln x}{2\ln x-1}$	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x}{2+x\ln x}$
$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$	$\lim_{x\to\infty}(\ln x)^2-x\ln x+2$	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(\ln x)^2+\frac{\ln x}{x}$	$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{1+x\ln x}$
$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2$	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x-2\ln x-(\ln x)^2$	$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}(\ln x)^3$	$\lim_{x\to\infty}x-\ln x-2(\ln x)^2$
$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(2+\sqrt{x})}$	$\lim_{x\to\infty}x\ln(2x)-(x+1)\ln(x+1)$	$\lim_{x\to\infty}(\ln x)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$	$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

التمرين الثاني

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ ما يلي :

$2\ln(x-3)=\ln x-2\ln 2$	$\ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln\left(x^2-9\right)$	$\ln(x+2)+\ln(x-2)=\ln 45$
$\ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln(x+11)$	$4(\ln x)^2-4\ln x-3=0$	$2(\ln x)^2+\ln x-6=0$
$\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\le 0$	$2\ln(x+1)-\ln(3x+7)\ge 0$	$\ln(x-3)\le 0$

التمرين الثالث

بين ما يلي :

بين أن $g'(x)$	إذا علمت أن $g(x)$	بين أن $f'(x)$	علما أن $f(x)$
$\frac{2\left(x^2-1\right)+3\ln x}{x^2}$	$2x-\frac{1+3\ln x}{x}$	$\frac{x+2}{x+3}$	$x-\ln(x+3)$
$\frac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}$	$\frac{x^2}{\ln x}$	$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$	$x-\frac{1}{x}-2\ln x$
$\frac{1-x-\ln x}{x^2}$	$\left(\frac{1-x}{x}\right)\ln x$	$\frac{2\ln x+1-x}{x}$	$x-\ln x+(\ln x)^2$
$2x(\ln x-1)$	$x^2\ln x-\frac{3}{2}x+1$	$\frac{2x^2+1-\ln x}{x^2}$	$2x+\frac{\ln x}{x}$
$(1-\ln x)(2+\ln x)^2$	$x\left(4-(\ln x)^3\right)$	$\frac{x-1-\ln x}{x}$	$x-\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2$

$\dfrac{x^2-2\ln x}{2x^2}$	$\dfrac{x}{2}+\dfrac{1+\ln x}{x}$	$\dfrac{x-2\ln x}{x}$	$x-(\ln x)^2$
$\dfrac{x^2-x-\ln x}{x^2}$	$\dfrac{x-1}{x}(x-1-\ln x)$	$\ln(x+1)$	$-x+(x+1)\ln(x+1)$
$\ln\left(\dfrac{3x}{x+2}\right)$	$x\ln(3x)-(x+2)\ln(x+2)$	$\dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$	$\dfrac{x}{1+\ln x}$
$\dfrac{(x^2-1)(1+\ln x)}{x^2}$	$x\ln x+\dfrac{2+\ln x}{x}$	$-\dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$	$\dfrac{x+\ln(x-1)}{x-1}$

التمرين الرابع

لتكن f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x\left(1+(\ln x)^2\right)}$ و (C_f) منحناها في م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أ- بين أن: $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^2=0$ (يمكن وضع $x=t^2$)

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ ماذا تستنتج ؟

2. أ- بين أن : $(\forall x>0);f'(x)=\dfrac{-(1+\ln x)^2}{x^2\left(1+(\ln x)^2\right)^2}$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f

التمرين الخامس

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $x\neq 0$; $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x^2\ln x$ و $f(0)=0$

1) أ- أدرس اتصال الدالة f على يمين النقطة $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0=0$

3) أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4) أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس رتابة الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها

5) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين السادس

الجزء (1) نعتبر الدالة g المعرفة على $D=[0,1[\cup]1,+\infty[$ $g(x)=\dfrac{2x}{x-1}+\ln|x-1|$

1) بين أن $g'(x)=\dfrac{x-3}{(x-1)^2}$

2) أ- ضع جدول تغيرات الدالة g (دون حساب نهايات g

ب- استنتج أن $g(x)>0$ على $]1,+\infty[$ و أن $g(x)\leq 0$ على $[0,1[$

الجزء (2) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $D=[0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{x}\ln|x-1|$

1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$

2) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

ب- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

جـ بين أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x-1}$) و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

3) أ- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$ لكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f) للدالة f

التمرين السابع

I] نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $g(x) = x - \ln x - 1$

1) أحسب $g'(x)$ و ضع جدول تغيرات g (نهايات غير مطلوبة)

2) استنتج أن $x - \ln x \geq 1$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right)$

II] لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $x \neq 0$; $f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x}$ و $f(0) = -1$

1) بين أن $D_f = [0,+\infty[$

2) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها

3) أ- بين أن f متصلة على يمين 0

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0

4) أ- بين أن $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$: $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right)$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f

5) أرسم المنحنى (C_f) (لاحظ أن $f(1) = 1$)

التمرين الثامن

الجزء (1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{-2}{x^2+1} + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

1) أحسب نهايتي الدالة g

2) أحسب $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي للمجال $]0,1[$ و استنتج إشارة $g(x)$

الجزء (2) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $x \neq 0$; $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ و $f(0) = 0$

1) بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- تحقق أن $f(x) = x\ln\left(x^2+1\right) - 2x\ln x$ $(\forall x > 0)$

ب- بين أن f متصلة على يمين $x_0 = 0$

ج- أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على يمين $x_0 = 0$

3) بين أن $f'(x) = g(x)$ $(\forall x > 0)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha \simeq 0,5$ و $f(\alpha) \simeq 0,8$)

التمرين التاسع

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $f(x) = \ln x + \frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}$

1) أحسب النهايتين $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{(\ln x-1)\left((\ln x)^2+\ln x+2\right)}{x(\ln x)^3}$ ثم أدرس منحنى تغيرات الدالة f

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا α ينتمي إلى المجال $]e^{-2},e^{-1}[$

5) أسم المنحنى (C_f) (نقبل أن للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف في $x_2=e^{-\sqrt{3}}$; $x_1=e^{\sqrt{3}}$)

6) أحسب مشتقة الدالة $g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ ثم استنتج مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) ، محور الأفاصيل و المستقيمين $x=e$; $x=e^2$

التمرين العاشر

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $x\neq 0$; $f(x)=x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ و $f(0)=0$

1) حدد مجموعة التعريف و أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)$

2) أ- أدرس اتصال الدالة f على يمين النقطة $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0=0$

3) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

4) أ- أحسب المشتقة $f'(x)$ و $f''(x)$

ب- أدرس رتابة الدالة f' و أنجز جدول تغيراتها ثم استنتج إشارة $f'(x)$

ج- أنجز جدول تغيرات الدالة f

5) أسم المنحنى (C_f)

التمرين الحادي عشر

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+(\ln x)^2} & ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين 0

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3) أ- بين أن $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right)\ f'(x)=\dfrac{(\ln x-1)^2}{\left(1+(\ln x)^2\right)^2}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أ- أعط معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 1

ب- بين أن (C_f) يوجد تحت المستقيم $(\Delta)\ y=x$

5) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $U_0=e$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \leq U_n$

ب- بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

ج- استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثاني عشر

الجزء (1) : نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2-x-\ln x$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$

ب- أحسب المشتقة $g'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة g

2) استنتج إشارة الدالة $g(x)\geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$

الجزء (2) : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+\left(\frac{1}{x}-1\right)(1+\ln x)$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

2) أ- بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) : f'(x)=\frac{1}{x^2}g(x)$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f

3) أ- تحقق أن $f(x)-x=\frac{(1-x)(1+\ln x)}{x}$

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(D)\ \ y=x$

4) أسم المنحنى (C_f) و المستقيم $(D)\ \ y=x$

الجزء (3) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $U_0=e$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n \geq 1$

2) بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

3) استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثالث عشر

الجزء الأول : نعتبر الدالة $g(x)=x-1-2x\ln x$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أ- أحسب $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g

ب- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا α في المجال $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right[$

ج- استنتج إشارة $g(x)$ (لاحظ أن $g(1)=0$)

الجزء الثاني : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $f(x)=1+x-\frac{1}{x}-2\ln x$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

3) أ- أحسب المشتقة $f'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

ب- أدرس رتابة الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها

4) أ- تحقق أن $f(x)-x=\frac{g(x)}{x}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(D)\ y=x$

ب- أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha=0,3$)

الجزء الثالث : نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n);\forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=\frac{1}{2} \end{cases}$$

أ- بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}:\ \alpha<u_n\leq 1$

ب- أدرس رتابة المتتالية (u_n)

ج- استنتج ان (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

التمرين الرابع عشر

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :
$$f(x)=x\left((\ln x)^2-\ln x+1\right)\ ;\ x\neq 0 \quad \text{و} \quad f(0)=0$$

1) أ- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(\ln x)^2=0$ و أدرس اتصال الدالة f على يمين $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3) أ- بين أن $f'(x)=\ln x(\ln x+1)\ :\ (\forall x\in\ ]0,+\infty[)$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أ- بين أن $f(x)-x=x\ln x(\ln x-1)\ :\ (\forall x>0)$

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta)\ \ y=x$

5) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء الثاني : نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=2$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

1) بين أن $1<U_n<e\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3) استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

الجزء الثالث : لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ نضع $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$

1) أحسب I_0 و بين أن $I_n\geq 0\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$

2) تحقق أن $I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x)^n(\ln x-1)dx$ ثم استنتج أن المتتالية $(I_n)_n$ تناقصية

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $2I_{n+1}=e^2-(n+1)I_n\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$

4) أحسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta)\ \ y=x$ و المستقيمين $x=1\ ;\ x=e$

5) أ- بين أن $\frac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\frac{e^2}{n+2}\ \ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$