01. باك 2015 الدورة العادية

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$.

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 2 cm) .

I. ..

01. بين أن : $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$ (D_f مجموعة تعريف الدالة f) . ...(0.5 ن)

02...

أ- أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x)$ و أول هندسيا النتيجتين المتوصل إليهما . ...(0.75 ن)

ب- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده. ....(0.5 ن)

ج- بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة (لحساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x)=x-x\ln x$ . ..(0.5 ن)

03....

أ- بين أن : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من D_f . ...(0.75 ن)

ب- بين أن : الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$ و تزايدية على كل من المجالين $[1;e[$ و $]e;+\infty[$ . ...(1 ن)

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f . ...(0.25 ن)

II. ..

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$.

و ليكن $(\mathcal{C}_g)$ المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم (أنظر الشكل) .

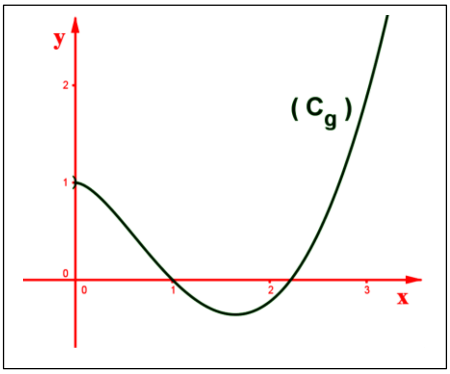
01. ..

أ- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) التالية : $g(x)=0$, $x\in]0;+\infty[$ . ..(0.5 ن)

ب- نعطي جدول القيم التالية :

x	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$
$g(x)$	$-0,14$	$-0,02$	$0,12$	$0,28$

بين أن : المعادلة (E) تقبل حلا α حيث : $2,2<\alpha<2,3$ . ...(0.5 ن)



02...

أ- تحقق من أن : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل x من D_f . ...(0.25 ن)

ب- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و α . ...(0.5 ن)

ج- حدد انطلاقا من $(\mathcal{C}_g)$ ؛ إشارة الدالة g على المجال $[1;\alpha]$ و بين أن $f(x)-x\le 0$ لكل x من $[1;\alpha]$ ....(0.5 ن)

.03 أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ . ... (1.25 ن)

.04 ..

أ- بين أن : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2$ (لاحظ أن : $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ لكل x من D_f . ... (0.75 ن)

ب- أحسب ، ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = \sqrt{e}$ . ... (0.75 ن)

.III ...

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

.01 بين بالترجع أن : $1 \le u_n \le \alpha$ لكل n من $\mathbb{N}$ . ... (0.5 ن)

.02 بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II (2 (ج -) .... (0.5 ن)

.03 استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها . ... (0.75 ن)

.02 باك 2014 الدورة العادية

.I لتكن الدالة العددية g المعرفة على $D =]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$.

.01 بين أن : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ و استنتج أن الدالة g تزايدية على $]0;+\infty[$. (0.5 ن)

.02 تحقق أن $g(1) = 0$ ثم استنتج أن $g(x) \le 0$ لكل x من $]0;1]$ و $g(x) \ge 0$ لكل x من $[1;+\infty[$. (0.75 ن)

.II نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = (1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}$. ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

.01 بين أن : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة . (0.5 ن)

.02 أ- أحسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. (0.25 ن)

ب – بين أن : $\lim_{x\to +\infty} \frac{(1+\ln(x))^2}{x} = 0$ (يمكنك وضع $t = \sqrt{x}$) ثم بين أن $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. (1 ن)

ج – حدد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$. (0.25 ن)

.03 أ- بين أن : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن f تناقصية على $]0;1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$. (1.5 ن)

ب- ضع جدول لتغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن $f(x) \ge 0$ لكل x من $]0;+\infty[$. (1 ن)

.04 أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب) . (0.75 ن)

05. نعتبر التكاملين I و J التاليين $I=\int_1^e (1+\ln(x))dx$ و $J=\int_1^e (1+\ln(x))^2 dx$.

أ – بين أن : $H : x \to x\ln(x)$ دالة أصلية للدالة $h : x \to 1+\ln(x)$ على $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن $I=e$. (0.5 ن)

ب - باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J=2e-1$. (0.5 ن)

ج – أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$. (0.5 ن)

03. باك 2013 الدورة الاستدراكية

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $D=]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2-x-\ln(x)$.

01. أ – تحقق أن : $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$. (0.25 ن)

ب - بين أن $g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ و استنتج أن الدالة g تناقصية على $]0;1]$ تزايدية على $[1;+\infty[$. (1ن)

02. بين أن : $g(x)\geq 0$ لكل x من $]0;+\infty[$ (لاحظ أن $g(1)=0$) . (0.5 ن)

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-1-(\ln(x))^2$ و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

01. أ - بين أن : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ و أول هندسيا النتيجة . (0.5 ن)

ب - بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ (لاحظ أن $f(x)=x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)$) . (0.5 ن)

ج – استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه . (0.25 ن)

02. أ- بين أن : $f'(x)=2\left(\frac{x^2-\ln(x)}{x}\right)$ لكل x من $]0;+\infty[$. (1 ن)

ب- تحقق أن : $\frac{x^2-\ln(x)}{x}=\frac{g(x)}{x}+1$ لكل x من $]0;+\infty[$ و استنتج أن f تزايدية على $]0;+\infty[$. (0.75 ن)

03. أ- بين أن : $y=2x-2$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة $A(1;0)$. (0.5 ن)

ب- أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة هي $A(1;0)$) . (1 ن)

04. أ - لنتحقق أن الدالة $x\to x(\ln(x)-1)$ دالة أصلية للدالة $x\to\ln(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ثم بين أن :

$I=\int_1^e \ln(x)dx=1$. (0.75 ن)

ب - باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J=\int_1^e (\ln(x))^2 dx=e-2$. (0.5 ن)

ج – بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=e$ هي $\frac{1}{3}(e^3-6e+8)\ cm^2$. (0.5 ن)