درس الدوال الأسية:

I. الدالة الأسيةالنبيرية: e^x

تعريف: الدالة العكسية للدالة $\ln$ تسمى الدالة الأسية و نرمز لها بالرمز $\exp$.

ملاحظة : الكتابة : $\exp(x)$ نكتبها باختصار على الشكل : e^x

نتائج: $e^0=1$. و $e^1=e$ ولدينا: $(\forall x\in\mathbb{R})e^x>0$.

$(\forall x\in\mathbb{R});(\forall y\in]0;+\infty[);(e^x=y\Leftrightarrow x=\ln y)$.

$(\forall x\in\mathbb{R});\ln(e^x)=x$ و $(\forall x\in]0;+\infty[);e^{\ln x}=x$

- الدالة $\exp$ متصلة وقابلة للاشتقاق و $(e^x)'=e^x$

ومنه الدالة الأسية النبيرية تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

$(e^x>e^y\Leftrightarrow x>y)$ و $(e^x=e^y\Leftrightarrow x=y)$ لكل x و y من $\mathbb{R}$

- لكل x و y من $\mathbb{R}$ و لكل r من $\mathbb{Q}$ لدينا:

و $\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$ و $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ و $e^x\times e^y=e^{x+y}$ و $e^{rx}=(e^x)^r$

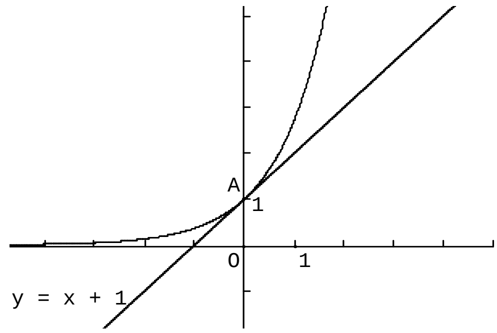
- إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فان الدالة: $f:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I

و لدينا $(\forall x\in I);\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I

هي الدوال المعرفة على I بما يلي: $x\mapsto e^{u(x)}+k$ حيث k عدد حقيقي

منحنى الدالة $\exp$: منحنى الدالة $\exp$ هو مماثل لمنحنى الدالة $\ln$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : $y=x$.



- **نهايات اعتيادية:** $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ و $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}=1$

$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

الأشكال الغير محددة هي : $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0\times\infty$ و $(+\infty)+(-\infty)$

II. الدالة الأسية للأساس a ($a\succ0$)

$(a\neq1)$: $(\forall x\in\mathbb{R})a^x=e^{x\ln a}$

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $\ln(a^x)=x\ln a$ و $a^x=a^y$ يكافئ $x=y$

ولدينا: $a^xa^y=a^{x+y};\frac{1}{a^x}=a^{-x};\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y};(a^x)^y=a^{xy}$

خاصية: الدالة $f:x\mapsto a^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=(\ln a)a^x$

- إذا كان $0\prec a\prec1$ فان: $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2);(a^x\prec a^y\Leftrightarrow x\succ y)$
- إذا كان $a\succ1$ فان: $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2);(a^x\prec a^y\Leftrightarrow x\prec y)$
- الدالة: $x\mapsto10^x$ تسمى الدالة الأسية للأساس 10 و نرمز لها بالرمز $\exp_{10}$

و اصطلاحا بالرمز 10^x و لدينا $10^x=e^{x\ln10}$

- $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall x\in]0;+\infty[);10^x=y\Leftrightarrow x=\log y$

حيث $\log$ هي دالة اللوغاريتم العشري

حظ سعيد

الأستاذ : نجيب عثماني