تصحيح التمرين الأول

1) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x}\right)^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$

إذن : لكل x من $\mathbb{R}$: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$

من الواضح أن : $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} / e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1 > 0\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = \ln 2$

لأن : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = 2$ و الدالة $\ln$ متصلة في 2.

<u>التأويل الهندسي :</u> (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y = \ln 2$ بجوار $-\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1\right) = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

4) ليكن $x \in \mathbb{R}$:
✓

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) \\ &= \ln\left(e^x \times \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right) \\ &= \ln\left(e^x\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \\ &= x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \end{aligned}$$

إذن : لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = \ln 1 = 0 \quad ✓$$

لأن $\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = 1$ و الدالة $\ln$ متصلة في 1.

<u>التأويل الهندسي :</u> (C_f) يقبل مقاربامائلا معادلته $y = x$ بجوار $+\infty$

5) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)\right)' \\ &= \frac{\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)'}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - 2.\dfrac{\left(e^x\right)'}{2\sqrt{e^x}}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - \dfrac{e^x}{\sqrt{e^x}}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - \sqrt{e^x}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$ و $\sqrt{e^x} > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{e^x} - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{e^x} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sqrt{(ex)}-1$	$-$	0	$+$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$ln2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}\right)' \\
&= \left(\frac{e^x-\sqrt{e^x}}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}\right)' \\
&= \frac{\left(e^x-\sqrt{e^x}\right)'.\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)-\left(e^x-\sqrt{e^x}\right).\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)'}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2} \\
&= \frac{\left(e^x-\frac{\sqrt{e^x}}{2}\right).\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)-\left(e^x-\sqrt{e^x}\right).\left(e^x-\sqrt{e^x}\right)}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2} \\
&= \frac{e^{2x}-2e^x\sqrt{e^x}+2e^x-\frac{e^x\sqrt{e^x}}{2}+e^x-\sqrt{e^x}-e^{2x}+2\sqrt{e^x}e^x-e^x}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2} \\
&= \frac{2e^x-\frac{e^x\sqrt{e^x}}{2}-\sqrt{e^x}}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2} \\
&= \frac{\frac{-\sqrt{e^x}}{2}\left(-4\sqrt{e^x}+e^x+2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2} = \frac{-\sqrt{e^x}\left(\left(\sqrt{e^x}\right)^2-4\sqrt{e^x}+4-2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}
\end{aligned}
$$

إذن : $f''(x)=\dfrac{-\sqrt{e^{x}}\left(\left(\sqrt{e^{x}}-2\right)^{2}-2\right)}{2\left(e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2\right)^{2}}$ لكل x من $\mathbb{R}$

لندرس تقعر (C_f) :

لدينا : $\sqrt{e^{x}}>0$ و $2\left(e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2\right)^{2}>0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-\left(\left(\sqrt{e^{x}}-2\right)^{2}-2\right)$

x	$-\infty$		$2ln(2-\sqrt{(2)})$		$2ln(2+\sqrt{(2)})$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

على المجال $\left]-\infty,2\ln\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$: $f''(x)\leq 0$ إذن (C_f) مقعر

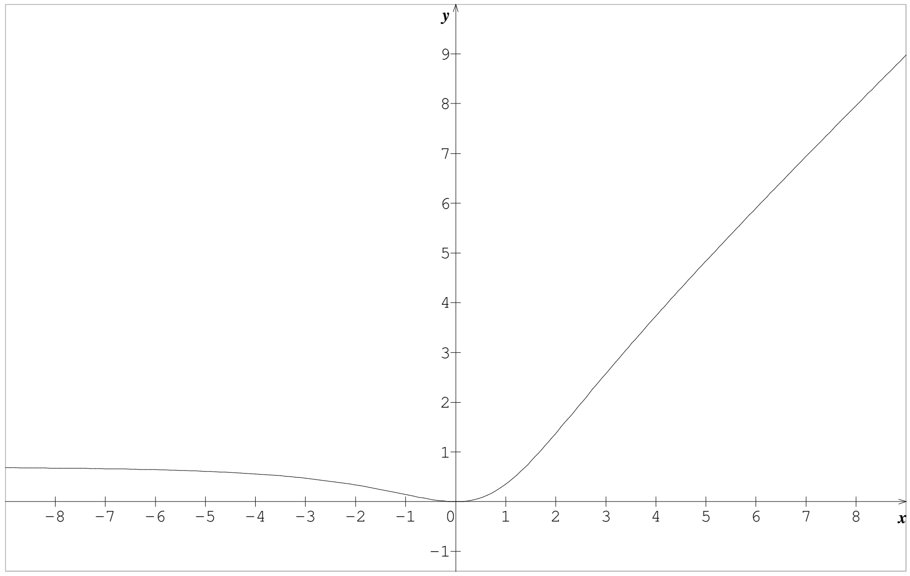
على المجال $\left[2\ln\left(2-\sqrt{2}\right),2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)\right]$: $f''(x)\geq 0$ إذن (C_f) محدب

على المجال $\left[2\ln\left(2+\sqrt{2}\right),+\infty\right[$: $f''(x)\leq 0$ إذن (C_f) مقعر

و بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند $2\ln\left(2-\sqrt{2}\right)$ فإن النقطة $I\left(2\ln\left(2-\sqrt{2}\right),f\left(2\ln\left(2-\sqrt{2}\right)\right)\right)$ هي نقطة انعطاف

و كذلك f'' تنعدم و تغير إشارتها عند $2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)$ فإن النقطة $J\left(2\ln\left(2+\sqrt{2}\right),f\left(2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\right)$ هي نقطة انعطاف

(7



8) المعادلة $e^{x}-e^{m}=2\left(-1+\sqrt{e^{x}}\right)$ $(x\in\mathbb{R})$ تكافئ $e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2=e^{m}$ $(x\in\mathbb{R})$

تكافئ $\ln\left(e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2\right)=m$ $(x\in\mathbb{R})$

تكافئ $f(x)=m$ $(x\in\mathbb{R})$

- ✓ إذا كان $m<0$: المعادلة لا تقبل حلا
- ✓ إذا كان $m=0$: المعادلة لها حلا وحيدا
- ✓ إذا كان $0<m<\ln 2$: المعادلة تقبل حلين
- ✓ إذا كان $m\geq\ln 2$: المعادلة لها حلا وحيدا

9) أ- لدينا g متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ (لأن g قصور f على المجال $[0,+\infty[$)

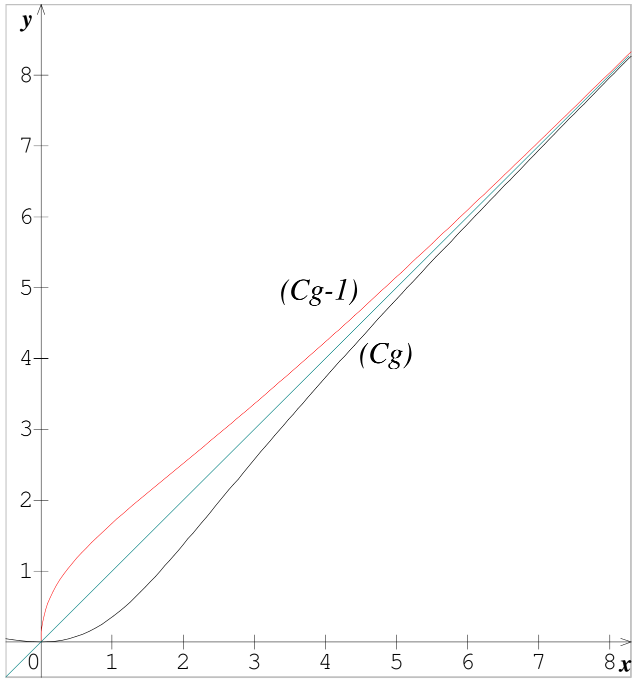
إذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من المجال $J=g\left([0,+\infty[\right)=[0,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$

ب- ليكن $x\in[0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
y = g^{-1}(x) \quad & \Leftrightarrow x = g(y) \\
& \Leftrightarrow x = \ln\left(\left(\sqrt{e^y}-1\right)^2+1\right) \\
& \Leftrightarrow e^x = \left(\sqrt{e^y}-1\right)^2+1 \\
& \Leftrightarrow e^x - 1 = \left(\sqrt{e^y}-1\right)^2 \\
& \Leftrightarrow \left|\sqrt{e^y}-1\right| = \sqrt{e^x-1} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{e^y}-1 = \sqrt{e^x-1} \, (y \geq 0) \\
& \Leftrightarrow \sqrt{e^y} = 1+\sqrt{e^x-1} \\
& \Leftrightarrow e^y = \left(1+\sqrt{e^x-1}\right)^2 \\
& \Leftrightarrow y = \ln\left(\left(1+\sqrt{e^x-1}\right)^2\right) \\
& \Leftrightarrow y = 2\ln\left(1+\sqrt{e^x-1}\right)
\end{aligned}$$

إذن لكل x من $[0,+\infty[$: $g^{-1}(x) = 2\ln\left(1+\sqrt{e^x-1}\right)$

ج-



تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول :

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(e^x+2\right) = \ln(2)$

لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x+2 = 2$ $\left(\lim_{x\to-\infty} e^x = 0\right)$ و الدالة $\ln$ متصلة في 2

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=\ln 2$ بجوار $-\infty$

2) أ- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^x+2\right) = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} e^x+2 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$:

✓

$$f(x) = \ln\left(e^x+2\right) = \ln\left(e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)\right) = \ln\left(e^x\right) + \ln\left(1+\frac{2}{e^x}\right) = x + \ln\left(1+2e^{-x}\right)$$

إذن : $f(x) = x + \ln\left(1+2e^{-x}\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+2e^{-x}\right) = \lim_{t\to-\infty} \ln\left(1+2e^{t}\right) = \ln(1) = 0$

لأن : $\lim_{t\to-\infty} 1+2e^t = 1$ و الدالة $\ln$ متصلة في 1

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$

3) لندرس تغيرات الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $e^x+2>0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\ln\left(e^x+2\right)\right)' = \frac{\left(e^x+2\right)'}{e^x+2} = \frac{e^x}{e^x+2}$$

من الواضح أن $f'(x)>0$ ($e^x>0$)

إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$ln2 \nearrow +\infty$

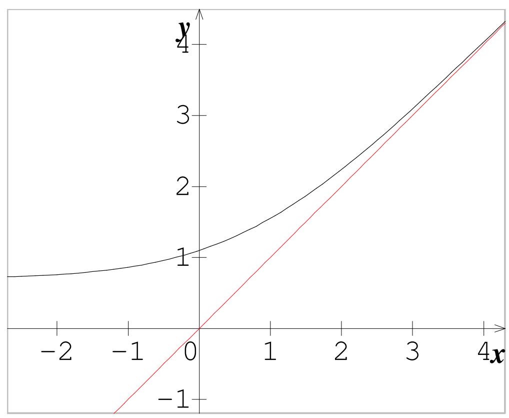
الجزء الثاني :

1) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)-x=\ln\left(1+2e^{-x}\right)$$

نعلم أن $2e^{-x}>0$ إذن $1+2e^{-x}>1$ إذن $\ln\left(1+2e^{-x}\right)>0$ إذن $f(x)-x>0$

و منه (C_f) يوجد فوق (Δ)



2) التكامل $I=\int_2^3\left|f(x)-x\right|dx$ هو مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$ و $x=3$

3) أ- لنبين أن لكل t من $[0,+\infty[$: $\ln(1+t)\le t$

نعتبر الدالة $u:t\mapsto\ln(1+t)-t$

$$u'(t)=\left(\ln(1+t)-t\right)'=\frac{1}{1+t}-1=\frac{1-1-t}{1+t}=\frac{-t}{1+t}$$

لدينا $t\ge 0$ إذن $\frac{-t}{1+t}\le 0$ إذن $u'(t)\le 0$ و منه الدالة u تناقصية

وبما أن $t\ge 0$ فإن $u(t)\le u(0)$

و بالتالي : $\ln(1+t)-t\le 0$

نستنتج أن لكل t من $[0,+\infty[$: $\ln(1+t)\le t$

ب- لدينا لكل t من $[0,+\infty[$: $\ln(1+t)\le t$

و بنا أن لكل x من $\mathbb{R}$: $2e^{-x}>0$

فإن : $\ln\left(1+2e^{-x}\right)\leq 2e^{-x}$

ج- لدينا : لكل x من $\mathbb{R}$: $0\leq \ln\left(1+2e^{-x}\right)\leq 2e^{-x}$

إذن $0\leq \int_2^3 \ln\left(1+2e^{-x}\right)dx \leq \int_2^3 2e^{-x}dx$

و منه $0\leq I \leq \int_2^3 2e^{-x}dx$ $\quad$ ($f(x)-x=\ln\left(1+2e^{-x}\right)>0$)

د-

✓ $\int_2^3 2e^{-x}dx = 2\int_2^3 e^{-x}dx = 2\left[-e^{-x}\right]_2^3 = 2\left(e^{-2}-e^{-3}\right)$

✓ $0\leq I \leq 2\left(e^{-2}-e^{-3}\right)$

$0\leq I \leq 2\left(e^{-2}-e^{-3}\right)\leq 0,2$

و هذا تأطير سعته $0,2$

つづく