التكــــــــــامـــــــل

I) تعــــــريـــــــف .

لتكن f دالة متصلة على مجال I وليكن a و b من I .

نسمي تكامل f من a إلى b العدد الذي نرمز له بـ $\int_a^b f(x)dx$

والمعرف بما يلي : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

حيث F دالة أصلية للدالة f .

ملاحظة .

*) نكتب $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

*) يمكن تعويض المتغير x بأي متغير آخر

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

II) خـــاصيـــات

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I وليكن a و b و c من I

(1 $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2 $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

(3 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (علاقة شال)

(4 $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(5 $\int_a^b af(x)dx = a\int_a^b f(x)dx$ حيث $a \in IR$.

(6 الدالة $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ هي الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في a .

(7 **a)** إذا كان $a \le b$ و $(\forall x \in [a,b]) \ : f(x) \ge 0$

فإن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

b) إذا كان $a \le b$ و $(\forall x \in [a,b]) \ : f(x) \le 0$

فإن $\int_a^b f(x)dx \le 0$

c) إذا كان $a \le b$ و $(\forall x \in [a,b]) \ : f(x) \le g(x)$

فإن $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

d) إذا كان $a \le b$ و فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

(8 **a)** العدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة لدالة f بين a و b

b) يوجد عدد c محصور بين a و b بحيث

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

(c $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ حيث m و M هم القيمة الدنوية و القيمة القصوية للدالة f على $[a,b]$.

ملاحظـــــة في الخاصية (8) ترتيب a و b غير مهم .

III) تقنيات حساب التكـــــامــــل .

1) المكاملة بالأجزاء .

لتكن f و g دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال I بحيث تكون f' و g' متصلتين على I وليكن a و b من I . لدينا :

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

IV) جدول الدوال الأصلية الإعتيادية

دالة أصلية F	الدالة f
1	0
ax	$a \neq 0$
$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$	x^r $(r \neq -1)$
$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	$u'u^r$ $(r \neq -1)$
$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$
$-\frac{1}{u}$	$\frac{u'}{u}$
$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$2\sqrt{u}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\ln\|u\|$	$\frac{u'}{u}$
e^x	e^x
$\frac{1}{a}e^{ax}$	e^{ax}

دالة أصلية F	الدالة f
$e^{u(x)}$	$u'e^{u(x)}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arctan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$-\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$	$1+\tan^2(ax+b = \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$
$\sin u(x)$	$u'(x)\cos(u(x))$
$-\cos u(x)$	$u'(x)\sin(u(x))$
$\tan u(x)$	$u'(x)(1+\tan^2(u(x))$

V) بعـــض التقنيـــــــات

(1 $I=\int \frac{P(x)}{ax+b}dx$ نجري قسمة $P(x)$ على $ax+b$
ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$.

(2 $I=\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$

a) إذا كان $\Delta<0$ نحدد الشكل القانوني $p(x)=ax^2+bx+c$
نحصل على $I=\int\frac{\alpha}{1+(u(x))^2}dx$ ونضع $t=u(x)$

b) إذا كان $\Delta>0$ نعمل $P(x)$ $p(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ثم
نستنتج أن $\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{\alpha-\beta}(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta})$ ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$

c) إذا كان $\Delta=0$
$$I=\int\frac{1}{(x-\alpha)^2}dx=\int\frac{(x-\alpha)'}{(x-\alpha)^2}dx=\left[-\frac{1}{x-\alpha}\right]$$

(3 $I=\int\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$ نجري قسمة $P(x)$ على
ax^2+bx+c ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$ أو $\frac{u'}{1+(u)^2}$.

(4 $I=\int P(x)\sqrt[n]{ax+b}\,dx$ أو $I=\int\frac{P(x)}{\sqrt[n]{ax+b}}dx$
نضع $t=\sqrt[n]{ax+b}$

(5 $I=\int P(x)\cos(ax)dx$ أو $I=\int P(x)\sin(ax)dx$ أو
$I=\int P(x)e^{kx}dx$ ← المكاملة بالأجزاء ونضع
$$\begin{cases} f(x)=P(x)\\ g'(x)=\cos(ax)..... \end{cases}$$

(6 $I=\int P(x)\cos\ln(x)dx$ أو $I=\int P(x)Arc\tan x\,dx$
← المكاملة بالأجزاء ونضع
$$\begin{cases} f(x)=\ln x \ \ (ou\ \ \arctan)\\ g'(x)=P(x)\end{cases}$$

(7 $I=\int e^{kx}\cos(ax)dx$ $I=\int e^{kx}\sin(ax)dx$
← المكاملة بالأجزاء مرتين ونجد $I=A+\alpha I$

(8 $I=\int\frac{1}{ae^x+b}dx$.
$$I=\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}(ae^x+b)}dx=\int\frac{e^{-x}}{a+be^{-x}}dx=\int\frac{u'}{u}$$

(9 $I=\int\frac{(\ln x)^r}{x}dx$
$$I=\int\frac{(\ln x)^r}{x}dx=\int(\ln x)'(\ln x)^r dx=\left[\frac{1}{r+1}(\ln x)^{r+1}\right]$$

(10 $I=\int\frac{u(x)v(x)}{(w(x))^n}dx$
← المكاملة بالأجزاء ونضع
$$\begin{cases} f'(x)=\frac{w'(x)}{(w(x))^n}\\ g(x)=....\end{cases}$$

V) تطبيقـــات حســــاب التــكامــــــل

1) حســـاب المســاحات

a) لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ $(a<b)$ وليكن (E) الحيز المحصور بـ C_f و $(x'Ox)$ و $x=a$ و $x=b$.
مساحة الحيز (E) هي $A(E)=(\int_a^b|f(x)|dx)\,u.a$

ملاحظـــة :

*) إذا كانت $f\geq 0$ يعني C_f يوجد فوق محور الأفاصيل فإن $A(E)=(\int_a^b f(x)\,dx)\,u.a$

*) إذا كانت $f\leq 0$ يعني C_f يوجد تحت محور الأفاصيل فإن $A(E)=(-\int_a^b f(x)\,dx)\,u.a$.

*) إذا كانت تغير الإشارة مثلا فإن
$A(E)=\int_a^\alpha f(x)\,dx-\int_\alpha^b f(x)\,dx$.

b) لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a,b]$ $(a<b)$ وليكن (E) الحيز المحصور بـ C_f و C_g و $x=a$ و $x=b$.
مساحة الحيز (E) هي $A(E)=(\int_a^b|f(x)-g(x)|dx)\,u.a$

ملاحظـــة :

*) إذا كانت $f\geq g$ يعني C_f يوجد فوق C_g
فإن $A(E)=\int_a^b(f(x)-g(x))dx$

*) إذا كانت $f\leq g$ يعني C_f يوجد تحت C_g
فإن $A(E)=\int_a^b(g(x)-f(x))dx$

*) إذا كان وضع C_f بالنسبة لـ C_g يتغير فإن
$$A(E)=\int_a^\alpha(g(x)-f(x))dx+\int_\alpha^b(f(x)-g(x))dx$$

c) إذا كان $\|\vec{i}\|=\alpha cm$ و $\|\vec{j}\|=\beta cm$
فإن وحدة قياس المساحات هو $u.a=\alpha\beta cm^2$

2) حساب الحجـــوم

a) ليكن (S) مجسما (أنظر الشكل)
وليكن V حجم الجزئ المحصور بـ
(S) و المستويين $z=a$ و $z=b$
إذا كانت الدالة $S:[a,b]\to IR$ ، $t\to S(t)$
متصلة على $[a,b]$ فإن $V=(\int_a^b S(t)\,dx)\,u.v$
($S(t)$ هي مساحة الجزئ تقاطع (S) و المستوى $z=t$)

b) لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$
إذا دار C_f حول محور الأفاصيل دورة كاملة فإنه يولد مجسما يسمى مجسم دوران ، وحجم هذا المجسم هو
$$V=(\int_a^b\pi(f(x)^2)dx)\,u.v$$