أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مـادة الـريـاضيات	الأستاذ : عثماني نجيب مذكرة رقم/9

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية
- **مسلك علوم الحياة و الأرض**
- **مسلك العلوم الفيزيائية**
- **مسلك العلوم الزراعية**

مذكرة رقم 9 في درس الحساب التكاملي

محتوى البرنامج
- تكامل دالة متصلة على قطعة
- خاصيات التكامل
- التكامل و الترتيب
- بعض تقنيات حساب التكامل
- حساب المساحات
- حساب الحجوم

القدرات المنتظرة
- حساب تكامل دالة عددية
- التمكن من حساب مساحة الحيز المحصور بين منحنيين
- التمكن من حساب حجم المجسم المولد بدوران منحنى دالة حول محور الأفاصيل

I.تكامل دالة متصلة على قطعة

1.تعريف:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ و F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a;b]$.

العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ يسمى تكامل الدالة f من a إلى b و نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ و يقرأ تكامل من a الى b ل $f(x)dx$

ترميز: العدد $\int_a^b f(x)dx$ يكتب أيضا $[F(x)]_a^b$ و لدينا:
.. $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

ملحوظة: في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض المتغير x بأي متغير أخر.

إذن: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(s)ds=$

أمثلة: 1) لنحسب : $I=\int_2^4 3x\,dx$

الدالة : $x\mapsto 3x$ متصلة على $[2;4]$

الدالة : $x\mapsto \frac{3}{2}x^2$ أصلية لها على $[2;4]$

إذن :

$$I=\int_2^4 3x\,dx=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_2^4=\frac{3}{2}\times 4^2-\frac{3}{2}\times 2^2=18$$

2) $I=\int_0^1(2x+3)dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=(1+3)-(0)=4$

3) $J=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}dt=[\ln t]_e^{e^2}=\ln e^2-\ln e=2-1=1$

4) $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin 0=\frac{1}{2}$

تمرين1: أحسب التكاملات الآتية : $I_1=\int_0^2(2x-1)dx$

$I_2=\int_{-1}^1(x^4-4x^3+2)dx \qquad I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$

$I_4=\int_0^{\ln 2}e^{2t}dt \qquad I_5=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}te^{-t^2}dt \qquad I_6=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx$

$I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx \qquad I_8=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$

$I_9=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$

$I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx \qquad I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}dx$

$I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x\,dx$

$I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx \qquad I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos 3x)dx$

$I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx \qquad I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx$

$I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx \qquad I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx$

$I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx \qquad I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2dx$

$I_{21}=\int_1^e\frac{8x^9-4x+2}{x}dx$

اجوبة :

$$I_1=\int_0^2(2x-1)\,dx=\left[2\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2=\left[x^2-x\right]_0^2$$

$$I_1=\left(2^2-2\right)-\left(0^2-0\right)=4-2=2$$

$$I_2=\int_{-1}^{1}\left(x^4-4x^3+2\right)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{4}x^4+2x\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{1}{5}x^5-1x^4+2x\right]_{-1}^{1}$$

$$I_2=\left[\frac{1}{5}x^5-1x^4+2x\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{5}1^5-1^4+2\right)-\left(\frac{1}{5}(-1)^5-(-1)^4-2\right)$$

$$I_2=\left(\frac{1}{5}-1+2\right)-\left(-\frac{1}{5}-1-2\right)=\frac{1}{5}-1+2+\frac{1}{5}+1+2=\frac{2}{5}+4=\frac{22}{5}$$

$$I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

$$I_4=\int_0^{\ln 2}e^{2t}dt=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}(2t)'e^{2t}dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}e^{2\times 0}$$

$$I_4=\frac{1}{2}e^{\ln 2^2}-\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}4-\frac{1}{2}e^0=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$I_5=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}te^{-t^2}dt=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}-\frac{1}{2}\left(-t^2\right)'e^{-t^2}dt=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$$

$$I_5=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}=-\frac{1}{2}e^{-\left(\sqrt{\ln 2}\right)^2}+\frac{1}{2}e^{-0^2}=-\frac{1}{2}e^{-\left(\sqrt{\ln 2}\right)^2}+\frac{1}{2}$$

$$I_5=-\frac{1}{2}e^{-\ln 2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\ln 2}}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$I_6=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\times\ln^2 x\,dx=\int_1^e\ln' x\times\ln^2 x\,dx$$

$$I_6=\left[\frac{1}{2+1}\ln^{2+1}x\right]_1^e=\frac{1}{3}\ln^3 e-\frac{1}{3}\ln^3 1=\frac{1}{3}$$

$$I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=\left[\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^{\ln 2}$$

$$I_7=\ln\left|e^{\ln 2}+1\right|-\ln\left|e^0+1\right|=\ln|3|-\ln|2|=\ln 3-\ln 2=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$I_8=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{e^x-e^{-x}}dx=\left[\ln\left|e^x-e^{-x}\right|\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I_8=\ln\left|e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}\right|-\ln\left|e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}\right|=\ln\left|3-\frac{1}{e^{\ln 3}}\right|-\ln\left|e^{\ln 2}-\frac{1}{e^{\ln 2}}\right|$$

$$I_8=\ln\left|3-\frac{1}{3}\right|-\ln\left|2-\frac{1}{2}\right|=\ln\left(\frac{8}{3}\right)-\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{2}}\right)=\ln\left(\frac{16}{9}\right)$$

$$I_9=\int_1^e\frac{1}{x}\ln x\,dx=\int_1^e(\ln x)'(\ln x)^1dx=\left[\frac{1}{1+1}(\ln x)^{1+1}\right]_1^e$$

$$I_9=\int_1^e\frac{1}{x}\ln x\,dx=\frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2$$

$$I_9=\int_1^e\frac{1}{x}\ln x\,dx=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

$$I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx=2\int_2^3\frac{\left(x^2+3x-4\right)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}}dx=2\left[\sqrt{x^2+3x-4}\right]_2^3$$

$$I_{10}=2\left[\sqrt{x^2+3x-4}\right]_2^3=2\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)$$

$$I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx=2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$$

$$I_{11}=2\left[\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3}(3)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}(1)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\left(\left(\sqrt{(3)}\right)^3-1\right)=\frac{4}{3}\left(3\sqrt{(3)}-1\right)$$

$$I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\sin^3 x\,dx=\left[\frac{1}{4}\sin x^{3+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{12}=\frac{1}{4}\sin^4\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin^4 0=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$$

$$I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx=3\int_1^2(3x-4)^{-5}dx=\int_1^2(3x-4)'(3x-4)^{-5}dx$$

$$I_{13}=\left[\frac{1}{-5+1}(3x-4)^{-5+1}\right]_1^2=\left[\frac{1}{-4}(3x-4)^{-4}\right]_1^2=\frac{1}{-4}(2)^{-4}-\frac{1}{-4}(-1)^{-4}$$

$$I_{13}=\frac{1}{-4}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{64}+\frac{16}{64}=\frac{15}{64}$$

$$I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos 3x)\,dx=\left[2x-\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\left(2\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\sin\pi\right)-0$$

$$I_{14}=\frac{2\pi}{3}$$

$I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ نعلم أن : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ (الاخطاط)

$$I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)\,dx$$

$$I_{15}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_{15}=\frac{\pi+2}{8}$$

$$I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{(2x+1)'}{2x+1}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln|3|+1-\frac{1}{2}\ln|1|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 3$$

$$I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\times\ln^3 x\,dx=\int_1^e\ln' x\times\ln^3 x\,dx$$

$$I_6=\left[\frac{1}{3+1}\ln^{3+1}x\right]_1^e=\frac{1}{4}\ln^4 e-\frac{1}{4}\ln^4 1=\frac{1}{4}$$

$$I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx$$

$$I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}\left((x-1)^2\right)'e^{(x-1)^2}dt=\left[\frac{1}{2}e^{(x-1)^2}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}e^{0}-\frac{1}{2}e^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e=\frac{1}{2}(1-e)$$

$$I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^2\frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln x)}dx$$

$$I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^2\frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)}dx=\left[\ln\left|1+\ln x\right|\right]_1^2$$

$$I_{19}=\ln\left|1+\ln 2\right|-\ln\left|1+\ln 1\right|=\ln\left|1+\ln 2\right|=\ln(1+\ln 2)$$

$$I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1+(\tan x)^2-1dx$$

$$I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left(1+(\tan x)^2\right)-1\right)dx=\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_{20}=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$

$$I_{21}=\int_1^e\frac{8x^9-4x+2}{x}dx=\int_1^e\left(8x^8-4+\frac{2}{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{8}{9}x^9-4x+2\ln x\right]_1^e=\frac{8}{9}e^9-4e+\frac{46}{9}$$

خاصيات مهمة : $\cos(2a)=1-2\sin^2 a$ و $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$

و $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ و $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$ و $\sin(2a)=2\sin a\times\cos a$

II.خاصيات ونتائج:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$ بحيث الدالة f' متصلة على المجال $[a;b]$

لدينا: $\int_a^b f'(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

لكل عدد حقيقي k لدينا: $\int_a^b kdx=[kx]_a^b=k(b-a)$

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a;b]$ لدينا:

$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$ و $\int_a^a f(x)dx=0$

2. علاقة شال وخطية التكامل

خاصية: لتكن f و g دالتين معرفتين و متصلتين على مجال I و a و b و c عناصر من I و k عددا حقيقيا

علاقة شال: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

الخطانية: $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

و $\int_a^b (kf)(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

مثال1: لنحسب التكامل $I=\int_0^3|x-1|dx$

لدينا: $x\in[0,3]$

$x-1=0$ يعني $x=1$ ندرس اشارة $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

علاقة شال $I=\int_0^3|x-1|dx=\int_0^1|x-1|dx+\int_1^3|x-1|dx$

$$I=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^3(x-1)dx$$

$$I=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{5}{2}$$

مثال2: نضع: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ $\quad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$

1. أحسب $I+J$ و $I-J$
2. استنتج قيمة كل من I و J

الجواب :

1) $$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx$$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=[x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=\frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{1}{2}$$

2) $\begin{cases} I+J=\frac{\pi}{4} \\ I-J=\frac{1}{2}\end{cases}$ بجمع المتساويتين طرف لطرف نجد :

$$2I=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

يعني : $I=\frac{\pi+2}{8}$ وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد :

$$\frac{\pi+2}{8}+J=\frac{\pi}{4}$$

يعني : $J=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi+2}{8}=\frac{2\pi-\pi-2}{8}=\frac{\pi-2}{8}$

تمرين2: نضع: $I=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ و $J=\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx$

1. أحسب $I+J$ و $I-3J$
2. استنتج قيمة كل من I و J

الجواب: 1)

$$I+J=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx+\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{\ln 16}\left(\frac{e^x+3}{e^x+4}+\frac{1}{e^x+4}\right)dx$$

$$I+J=\int_0^{\ln 16}\left(\frac{e^x+4}{e^x+4}\right)dx=[x]_0^{\ln 16}=\ln 16-0=4\ln 2$$

$$I-3J=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx-3\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{\ln 16}\left(\frac{e^x+3}{e^x+4}-\frac{3}{e^x+4}\right)dx$$

$$I-3J=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x}{e^x+4}dx=\int_0^{\ln 16}\frac{\left(e^x+4\right)'}{e^x+4}dx=\left[\ln\left|e^x+4\right|\right]_0^{\ln 16}$$

$$I-3J=\ln\left|e^{\ln 16}+4\right|-\ln\left|e^0+4\right|=\ln|20|-\ln|5|=\ln 20-\ln 5$$

$$I-3J=\ln\frac{20}{5}=\ln 4=2\ln 2$$

(2 $\begin{cases} I+J=4\ln 2 \\ I-3J=2\ln 2 \end{cases}$ بطرح المتساويتين طرف لطرف نجد :

$4J=2\ln 2$

يعني : $J=\frac{\ln 2}{2}$ وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد :

$\frac{\ln 2}{2}+I=4\ln 2$ يعني : $I=4\ln 2-\frac{\ln 2}{2}=\frac{7\ln 2}{2}$

تمرين3: احسب التكامل $I=\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx$

الجواب: $x-2=0$ يعني $x=2$ ندرس اشارة $x-2$

x	$-\infty$ $\quad 2 \quad$ $+\infty$
$x-2$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

$$I=\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx=\int_0^2 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx+\int_2^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx$$

علاقة شال:

$$=\int_0^2 \frac{-(x-2)}{(x^2-4x)^2}dx+\int_2^3 \frac{x-2}{(x^2-4x)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{-(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2}dx+\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_1^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_2^3$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-4}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{6}-\frac{2}{8}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

تمرين4: احسب التكامل $I=\int_0^2 |x^2-x-2|dx$

تمرين5: نضع $A=\int_1^e \left(\frac{1}{t}+\ln t\right)dt$

$B=\int_1^e \left(1+\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$ أحسب $A+B$

الجواب:

$$A+B=\int_1^e \left(\frac{1}{t}+\ln t+1+\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt=\int_1^e \left(\frac{1}{t}+\ln t+1-\ln(t)\right)dt$$

$$A+B=\int_1^e \left(\frac{1}{t}+1\right)dt=\left[\ln|t|+t\right]_1^e=\ln e+e-\ln|1|-1=e$$

تمرين6: نضع: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\times\cos 2x dx$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\times\cos 2x dx$

1. أحسب $I+J$ و $I-J$
2. استنتج قيمة كل من I و J

الجواب :

(1 $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\times\cos 2x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\times\cos 2x dx$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\times 1dx=\frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I+J=\frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}[\sin\pi-\sin 0]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\times\cos 2x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\times\cos 2x dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\times\cos 2x dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x dx$$

باستعمال القاعدة : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ $\quad a=2x$ نجد :

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)=\frac{\pi}{4}$$

(2 $\begin{cases} I+J=0 \\ I-J=\frac{\pi}{4} \end{cases}$ بجمع المتساويتين طرف لطرف نجد : $2I=\frac{\pi}{4}$

يعني : $I=\frac{\pi}{8}$ وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد : $\frac{\pi}{8}+J=0$

يعني : $J=-\frac{\pi}{8}$

تمرين7: 1)تحقق أنه لكل t من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $\frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{1+t}$

2)أحسب التكامل I حيث: $I=\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt$

الجواب: 1)

$$\frac{t^2}{1+t}=\frac{(t^2-1)+1}{1+t}=\frac{t^2-1}{1+t}+\frac{1}{1+t}=\frac{(t-1)(t+1)}{1+t}+\frac{1}{1+t}$$

$\frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{1+t}$ لكل t من $\mathbb{R}-\{-1\}$

(2

$$I=\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt=\int_0^1 \left(t-1+\frac{(1+t)'}{1+t}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right]_0^1$$

$$I=\frac{1}{2}-1+\ln|2|=-\frac{1}{2}+\ln 2$$

تمرين8: 1)تحقق أنه لكل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$:

$$\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}$$

2)أحسب التكامل I حيث: $I=\int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1}dx$

الجواب :

(1 $\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}=\frac{18(x-1)-2(x+1)}{4(x+1)(x-1)}=\frac{18x-18-2x-2}{4(x+1)(x-1)}$

$$=\frac{16x-20}{4(x+1)(x-1)}=\frac{4x-5}{(x+1)(x-1)}=\frac{4x-5}{x^2-1}$$

(2 $I=\int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1}dx=\int_3^5 \left(\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}\right)dx$

$$=\frac{9}{2}\int_3^5\frac{1}{(x+1)}dx-\frac{1}{2}\int_3^5\frac{1}{x-1}dx=\frac{9}{2}\int_3^5\frac{(x+1)'}{(x+1)}dx-\frac{1}{2}\int_3^5\frac{(x-1)'}{x-1}dx$$

$$=\frac{9}{2}\Big[\ln|x+1|\Big]_3^5-\frac{1}{2}\Big[\ln|x-1|\Big]_3^5=\frac{9}{2}(\ln 6-\ln 4)-\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 2)$$

$$I=\frac{9}{2}\ln 6-\frac{9}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{9}{2}\ln 6-\frac{19}{2}\ln 2$$

تمرين 9: للبحث.

1. حدد الأعداد الحقيقية a و b علما أن :

$$\frac{x^3}{x^2+1}=ax+\frac{bx}{x^2+1}$$

2. استنتج قيمة التكامل: $I=\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx$

تمرين 10: نضع: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx$

1. بين : $\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$ (عملية الاخطاط)

2. استنتج حساب التكامل: I

الجواب :

1) لنبين أن: $\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا: $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ و منه: $\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4+4\left(e^{ix}\right)^3\cdot\left(e^{-ix}\right)+6\left(e^{ix}\right)^2\cdot\left(e^{-ix}\right)^2+4\left(e^{ix}\right)^1\cdot\left(e^{-ix}\right)^3+\left(e^{-ix}\right)^4\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{2ix}+6\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{2ix}\right)+6\right)$$

نعلم أن : $2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$ و $2\cos nx=e^{inx}+e^{-inx}$

اذن : $\cos^4\theta=\frac{1}{16}\left((2\cos 4x)+4(2\cos 2x)+6\right)$

$$\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$$

2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 4x+4\cos 2x+3)\,dx$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x+4\,\frac{1}{2}\sin 2x+3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 2\pi+4\frac{1}{2}\sin\pi+3\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{16}$$

III. التكامل و الترتيب :

1. خاصية:

لتكن f و g دالتين متصلتين على المجال I و a و b عنصرين من هذا المجال.

- إذا كان $a\le b$ و f موجبة على القطعة $[a;b]$ فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$$

- إذا كان $a\le b$ و $(\forall x\in[a;b]);\ f(x)\le g(x)$ فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

مثال 1: بين أن : $\frac{1}{6}\le I=\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx\le\frac{1}{3}$

الجواب : لدينا: $0\le x\le 1\Leftrightarrow x\in[0,1]$

اذن $1\le x+1\le 2$: $\frac{1}{2}\le\frac{1}{x+1}\le 1$

اذن: $\frac{x^2}{2}\le\frac{x^2}{1+x}\le x^2$

وبالتالي : $\int_0^1\frac{x^2}{2}dx\le\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx\le\int_0^1 x^2dx$

اذن : $\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1\le I\le\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$ ومنه : $\frac{1}{6}\le I\le\frac{1}{3}$

مثال 2: لدينا الدالة $\ln$ متصلة و موجبة على القطعة $[1;e]$ و $1\le e$ إذن: $\int_1^e\ln x\,dx\ge 0$

مثال 3: لنبين أن : $\frac{1}{e}\le\int_0^1 e^{-x^2}dt\le 1$

ليكن t عنصرا من $[0;1]$ لدينا $0\le t^2\le 1$ و منه :

$$-1\le -t^2\le 0$$

بما أن الدالة $x\mapsto e^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن $e^{-1}\le e^{-x^2}\le 1$

و بما أن الدالة $t\mapsto e^{-x^2}$ متصلة على المجال $[0;1]$ و $0\prec 1$ فإن:

$$\int_0^1 e^{-1}dt\le\int_0^1 e^{-t^2}dt\le\int_0^1 1dt$$

إذن: $\frac{1}{e}\le\int_0^1 e^{-x^2}dt\le 1$

تمرين 11: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx$$

1) بين أن (u_n) تزايدية 2) بين أن : $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب : (1

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^{n+1}}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1+x^n-1-x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\right)dx=\int_0^1\frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx$$

نعلم أن : $0\le x\le 1$ اذن : $0\le 1-x$ ولدينا :

$$\frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\ge 0$$

إذن : $\frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \ge 0$ ومنه :

$$\int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx \ge 0$$

وبالتالي $u_{n+1}-u_n \ge 0$ أي : (u_n) تزايدية

2)لدينا: $0\le x^n\le 1 \Leftrightarrow 0\le x\le 1 \Leftrightarrow x\in[0,1]$

$\Leftrightarrow 1\le x^n+1\le 2$

إذن : $\frac{1}{2}\le \frac{1}{x^n+1}\le 1$

وبالتالي : $\int_0^1 \frac{1}{2}dx \le \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx \le \int_0^1 1dx$

إذن $\frac{1}{2}[x]_0^1 \le \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx \le [x]_0^1$ ومنه : $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$

2. القيمة المتوسطة

خاصية و تعريف:

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من المجال I بحيث $a\prec b$.

يوجد على الأقل عنصر c من المجال $[a;b]$ بحيث:

- $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

العدد الحقيقي $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$

تمرين12 نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

حدد القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;\ln 2]$

الجواب : القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;\ln 2]$ هي :

$$f(c)=\frac{1}{\ln 2-0}\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx=\frac{1}{\ln 2-0}\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\left[-\frac{1}{e^x+1}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3\ln 2}$$

IV.بعض تقنيات حساب التكامل

1. استعمال الدوال الأصلية

هذه التقنية تعتمد أساسا على الدوال الأصلية الاعتيادية

أمثلة:

$$I=\int_0^{\ln 2}e^{4t}dt=\left[\frac{1}{4}e^{4t}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{4}e^{4\ln 2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}e^{\ln 16}-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$$

$$J=\int_1^e\frac{\ln^5 x}{x}dx=\int_1^e \ln' x\ln^5 xdx=\left[\frac{1}{6}\ln^6 x\right]_1^e=\frac{1}{6}$$

2. المكاملة بالأجزاء:

خاصية: لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a;b]$ بحيث الدالتان u' و v' متصلتان على المجال $[a;b]$

لدينا :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

هذه الصيغة تسمى صيغة المكاملة بالأجزاء

مثال1: لنحسب $I=\int_0^{\pi}x\sin xdx$

نضع $u'(x)=\sin x$ و $v(x)=x$, و منه $u(x)=-\cos x$ و $v'(x)=1$

لدينا u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[0;\pi]$ و u' و v' متصلتان على المجال $[0;\pi]$

ومنه:

$$I=[-x\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos xdx=[-x\cos x]_0^{\pi}-[-\sin x]_0^{\pi}=\pi$$

مثال2: لنحسب $J=\int_0^{\ln 2}xe^xdx$

نضع $u'(x)=e^x$ و $v(x)=x$, و منه $u(x)=e^x$ و $v'(x)=1$

لدينا u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[0;\ln 2]$ و u' و v' متصلتان على المجال $[0;\ln 2]$

ومنه: $J=\left[xe^x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}1e^xdx=\ln 2e^{\ln 2}-\left[e^x\right]_0^{\ln 2}$

$$J=2\ln 2-\left(e^{\ln 2}-1\right)=2\ln 2-(2-1)=2\ln 2-1$$

مثال3: لنحسب $K=\int_1^e\ln xdx$

$$K=\int_1^e\ln xdx=\int_1^e 1\times\ln xdx$$

نضع $u'(x)=1$ و $v(x)=\ln x$, و منه $u(x)=x$ و $v'(x)=1/x$

لدينا u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[1;e]$ و u' و v' متصلتان على المجال $[1;e]$

ومنه: $K=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx=e\ln e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx$

$$K=e-\int_1^e 1dx=e-[x]_1^e=e-e+1=1$$

تمرين13: باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات الآتية :

$$J=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx \quad \text{و} \quad I=\int_0^1 xe^{2x}dx$$

الأجوبة: مكاملة بالأجزاء :

$$I=\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

$$I=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_1^{e^3}x^{-\frac{2}{3}}\ln x\,dx$$

$$=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-\int_1^{e^3}3x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}dx=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-3\int_1^{e^3}x^{-\frac{2}{3}}dx$$

$$=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-9\left[x^{\frac{1}{3}}\right]_1^{e^3}=9$$

تمرين14: باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات الآتية :

$$I=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx \qquad J=\int_0^1(x-1)e^{-x}dx$$

$$K=\int_0^1\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx \qquad M=\int_1^e x\left(1-\ln x\right)dx$$

$$N=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$$

$$Q=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx \qquad R=\int_1^e x\ln x\,dx$$

V. حساب المساحات:

نشاط: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ مع $\|\vec{i}\|=1cm$ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال : $[1;3]$ كالتالي: $f(x)=2x+1$

1) هل f دالة متصلة على قطعة $[1;3]$ ؟

2) أرسم $\left(C_f\right)$ منحنى الدالة f على المجال $[1;3]$

3) أحسب مساحة حيز المستوى $\left(\Delta_f\right)$ المحصور بين $\left(C_f\right)$ منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x=1$ و $x=3$

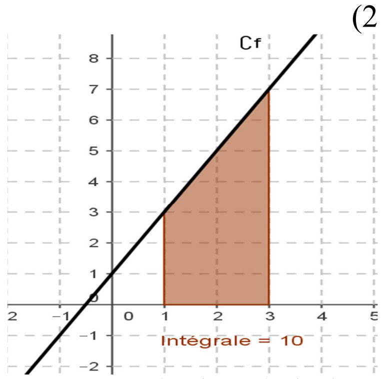
4) أحسب التكامل التالي : $I=\int_1^3 f(x)dx$

5) ماذا تلاحظ؟

أجوبة :

1) f دالة حدودية متصلة على مجموعة تعيفها اذن متصلة على المجال $[1;3]$

2)



3) الشكل المحصل عليه هو عبارة عن شبه منحرف :يمكن حساب مساحته بتقسيمه الى مستطيل ومثلث ومنه نجد :

$$A\left(\Delta_f\right)=2\times3+\frac{4\times2}{2}=2\times3c^2m+\frac{4\times2}{2}c^2m=10c^2m$$

4) $I=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3(2x+1)dx=\left[x^2+x\right]_1^3$

$$I=\left(3^2+3\right)-\left(1^2+1\right)=12-2=10$$

5) نلاحظ أن : $A\left(\Delta_f\right)=\int_1^3 f(x)dx.ua$

في كل ما يلي المستوى منسوب إلى معلم متعامد $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ وحدة قياس المساحات و التي نرمز لها بالرمز $u.a$ هي مساحة المستطيل $OIKJ$

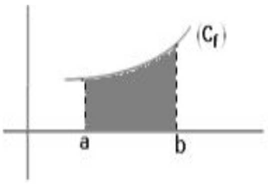
يعني أن: $u.a=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$

خاصية 1: لتكن f دالة متصلة على قطعة $[a;b]$

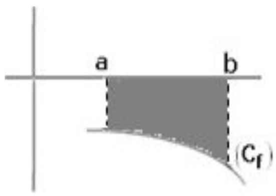
لتكن A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى $\left(C_f\right)$ الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي $x=a$ و $x=b$

• إذا كانت f موجبة على القطعة $[a;b]$ فان: $A=\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات (الشكل 1)

• إذا كانت f سالبة على القطعة $[a;b]$ فان: $A=-\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات (الشكل 2)



شكل 1



شكل 2

خاصية 2: لتكن f دالة متصلة على قطعة $[a;b]$

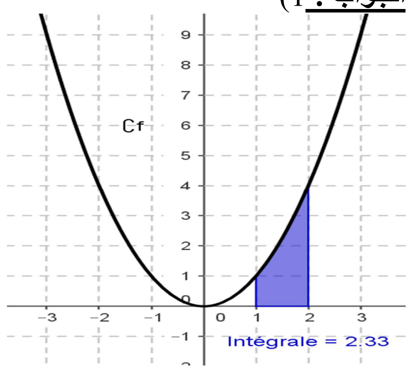
مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى $\left(C_f\right)$ الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي $x=a$ و $x=b$ هي العدد الحقيقي الموجب $A=\int_a^b\left|f(x)\right|dx$ بوحدة قياس المساحات.

مثال1: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ مع $\|\vec{i}\|=2cm$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=x^2$

1) أرسم $\left(C_f\right)$ 2) أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي: $x=1$ و $x=2$

الجواب : 1)



2)حسب الخاصية السابقة يكفي حساب التكامل التالي :

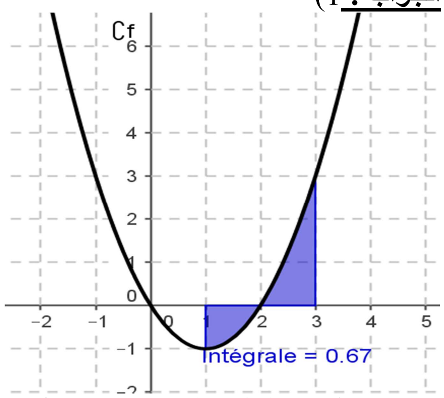
$$A=\int_1^2\left|f(x)\right|dx$$

$$A=\int_1^2\left|f(x)\right|dx=\int_1^2\left|x^2\right|dx=\int_1^2 x^2dx=$$

$$A=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{1}{3}\times2^3-\frac{1}{3}\times1^3=\frac{7}{3}\times2cm\times2cm=\frac{28}{3}c^2m$$

مثال2: المستوى المنسوب الى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=3cm$ نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=x^2-2x$ أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x=1$ و $x=3$

الجواب : 1)



2)حسب الخاصية السابقة يكفي حساب التكامل التالي :

$$A=\int_1^3\left|f(x)\right|dx$$

$$A=\int_1^3\left|f(x)\right|dx=\int_1^3\left|x^2-2x\right|dx=$$

دراسة اشارة x^2-2x على المجال : $[1;3]$

$x^2-2x=0$ يعني $x(x-2)=0$ يعني $x=0$ أو $x=2$

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$x2-2x$	+ 0 − 0 +

$$A=\int_1^3\left|x^2-2x\right|dx=\int_1^2\left|x^2-2x\right|dx+\int_2^3\left|x^2-2x\right|dx$$

$$A=\int_1^2-\left(x^2-2x\right)dx+\int_2^3\left(x^2-2x\right)dx$$

$$A=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$$

$$=-\frac{1}{3}\times2^3+2^2+\frac{1}{3}\times1^3-1^2+\frac{1}{3}\times3^3-3^2-\frac{1}{3}\times2^3+2^2$$

$$=-\frac{2}{3}\times2^3+8+\frac{1}{3}-1+\frac{27}{3}-9=-\frac{16}{3}+\frac{1}{3}+\frac{27}{3}-2$$

$$A=2\times2cm\times3cm=12c^2m$$

تمرين15: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=2cm$ ونعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=1-e^x$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x=\ln 2$ و $x=\ln 4$

الجواب:

يكفي حساب التكامل التالي : $I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left|f(x)\right|dx$

$$I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left|f(x)\right|dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left|1-e^x\right|dx$$

نعلم أن : $\ln 2\le x\le\ln 4$ يعني $e^{\ln 2}\le e^x\le e^{\ln 4}$ يعني $2\le e^x\le 4$

اذن : $e^x>1$ أي : $1-e^x<0$

ومنه :

$$I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left|1-e^x\right|dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}-\left(1-e^x\right)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left(e^x-1\right)dx$$

$$I=\left[e^x-x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}=\left(e^{\ln 4}-\ln 4\right)-\left(e^{\ln 2}-\ln 2\right)$$

$$I=(4-2\ln 2)-(2-\ln 2)=4-2\ln 2-2+\ln 2=2-\ln 2$$

ومنه : $A=(2-\ln 2)\times2cm\times2cm=4(2-\ln 2)c^2m$

تمرين16 للبحث: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=2cm$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=e^x-3$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x=\ln 3$ و $x=\ln 6$

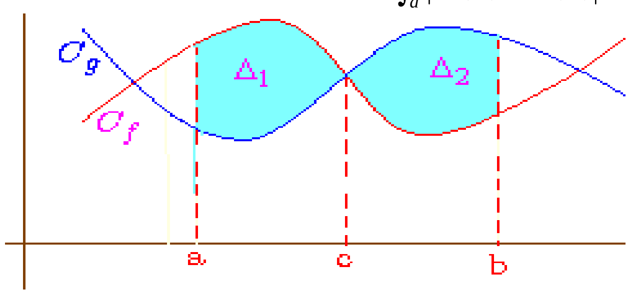
تمرين17 للبحث: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=2cm$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=\ln x-1$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x=1$ و $x=e$

خاصية3: لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$, و (C_f) و (C_g) المنحنيين الممثلين لهما على التوالي في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x=a$ و $x=b$ هي العدد: $\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$ بوحدة قياس المساحات



تمرين18: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\|=2cm$

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي:

$$f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}+e^{-x}\quad\text{و}\quad g(x)=e^{-x}$$

أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنيي الدالتين f و g و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي: $x=0$ و $x=\ln 2$ (إنشاء المنحنيين غير مطلوب)

الجواب: يكفي حساب التكامل التالي : $I=\int_1^e \left|f(x)-g(x)\right|dx$

$$I=\int_0^{\ln 2}\left|\frac{2e^x}{e^x+1}+e^{-x}-e^{-x}\right|dx=\int_0^{\ln 2}\left|\frac{2e^x}{e^x+1}\right|dx=\int_0^{\ln 2}\frac{2e^x}{e^x+1}dx$$

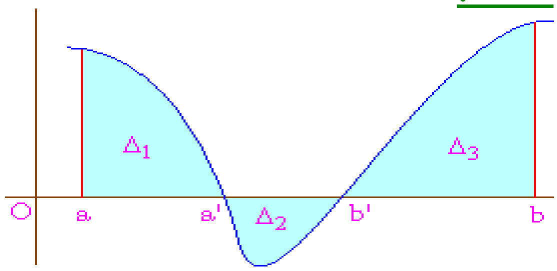
لأن : $\frac{2e^x}{e^x+1}>0$

ومنه : $I=\int_0^{\ln 2}\frac{2e^x}{e^x+1}dx=2\int_0^{\ln 2}\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=\left[2\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^{\ln 2}$

$$I=2\ln\left|e^{\ln 2}+1\right|-2\ln\left|e^0+1\right|=2\ln 3-2\ln 2=2\ln\frac{3}{2}$$

ومنه : $A=2\ln\frac{3}{2}\times 2cm\times 2cm=8\ln\frac{3}{2}c^2m$

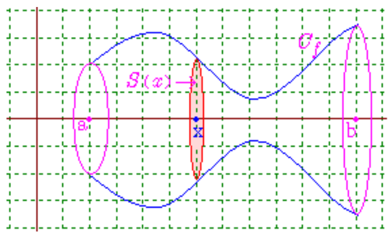
ملاحظة :



$$A(\Delta)=\int_a^{a'}f(x)dx+\int_{a'}^{b'}-f(x)dx+\int_{b'}^{b}f(x)dx$$

VI. حساب الحجوم:

اذا دار $\left(C_f\right)$ على محور الأفاصيل دورة كاملة فانه يولد مجسما يسمى مجسم الدوران



الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ وحدة قياس الحجوم هي: $u.v=\left\|\vec{i}\right\|\left\|\vec{j}\right\|\left\|\vec{k}\right\|$

$S(x)=\pi\left(f(x)\right)^2$ **(مساحة دائرة شعاعها** $|f(x)|$ **)**

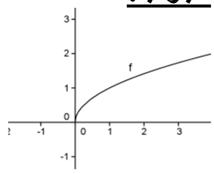
خاصية: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ و f متصلة على المجال $[a;b]$

حجم مجسم الدوران المولد عند دوران المنحنى الممثل للدالة f حول المحور (Ox) هو : $V=\int_a^b\pi\left(f(x)\right)^2dx$ بوحدة قياس الحجوم.

مثال: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ بحيث : $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$ لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\sqrt{x}$ ليكن (C) منحناها في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل على المجال $[0;4]$

الجواب:



$$I=\int_0^4\pi\left(f(x)\right)^2dx=\int_0^4\pi\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^4 xdx$$

$$I=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=8\pi$$

ومنه : $V=8\pi\times 8c^3m=64\pi c^3m$

تمرين19 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ بحيث : $\left\|\vec{i}\right\|=\frac{2}{3}cm$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=\sqrt{x\left(e^x-1\right)}$$

ليكن (C) منحناها في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل على المجال $[0;1]$

الجواب:

$$I=\int_0^1\pi\left(f(x)\right)^2dx=\int_0^1\pi\left(\sqrt{x\left(e^x-1\right)}\right)^2dx=\pi\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx$$

نحسب أولا : $\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx$

نستعمل تقنية المكاملة بالأجزاء

نضع $u'(x)=e^x-1$ و $v(x)=x$, و منه $u(x)=e^x-x$ و $v'(x)=1$

ومنه: $\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=\left[x\left(e^x-x\right)\right]_0^1-\int_0^1 1\left(e^x-x\right)dx$

$$\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=e-1-\left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=e-1-e+\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

ومنه : $I=\frac{1}{2}\pi$ وبالتالي : $V=\frac{1}{2}\pi\times\frac{8}{27}c^3m=\frac{4\pi}{27}c^3m$

تمرين 20 للبحث: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ بحيث : $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\sqrt{\ln x}$

ليكن (C) منحناها في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل على المجال $[1;e]$

تمرين 21 للبحث: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ بحيث : $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=x\sqrt{1-lnx}$$

ليكن (C) منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل على المجال $[1;e]$

تمرين22 : المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=1cm$ نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=x-1+\frac{\ln x}{x}$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين الدالة f و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي $y=x-1$ و $x=1$ و $x=e$

الجواب: يكفي حساب التكامل التالي : $I=\int_1^e |f(x)-y|dx$

$$I=\int_1^e \left|x-1+\frac{\ln x}{x}-(x-1)\right|dx=\int_1^e \left|\frac{\ln x}{x}\right|dx=\int_1^e \frac{|\ln x|}{|x|}dx$$

نعلم أن : $1\le x\le e$ يعني $\ln(1)\le \ln x\le \ln e$ يعني $0\le \ln x\le 1$

ومنه : $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx=\int_1^e (\ln x)'(\ln x)^1 dx$

$$I=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=\frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2=\frac{1}{2}$$

ومنه : $A=\frac{1}{2}1cm\times 1cm=\frac{1}{2}c^2m$