# الحسَاب التكامُلي

## I. تكامل دالة متصلة على مجال:

### 1. تعريف :

**لتكن $f$ دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و $F$ دالة أصلية لها على $[a,b]$.**

**تكامل $f$ من $a$ إلى $b$ هو العدد الحقيقي : $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$**

### 2. ملاحظات :

- نكتب $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$
- يمكن تغيير $x$ بأي متغير آخر مثلا : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = .........$

### 3. خاصيات :

- ❖ $\int_a^a f(x)dx = 0$
- ❖ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- ❖ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

### 4. خطانية التكامل :

#### خاصية :

**لتكن $f$ و $g$ دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$ .لدينا :**

- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$

## II. التكامل و الترتيب :

### 1. خاصية :

لتكن $f$ و $g$ دالتان متصلتان على المجال $\left[a,b\right]$. لدينا :

- إذا كانت $f\geq 0$ على $\left[a,b\right]$ فإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$
- إذا كانت $f\leq 0$ على $\left[a,b\right]$ فإن $\int_a^b f(x)dx\leq 0$
- إذا كانت $f\leq g$ على $\left[a,b\right]$ فإن $\int_a^b f(x)dx\leq \int_a^b g(x)dx$

### 2. القيمة المتوسطة :

تعريف و خاصية :

- لتكن $f$ دالة متصلة على مجال $\left[a,b\right]$ . العدد $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل $f$ على $\left[a,b\right]$
- يوجد على الأقل عدد $c$ من $\left[a,b\right]$ بحيث : $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

## III. تقنيات حساب التكامل :

### أ. باستعمال دالة أصلية : سبق الحديث عنها في بداية الدرس

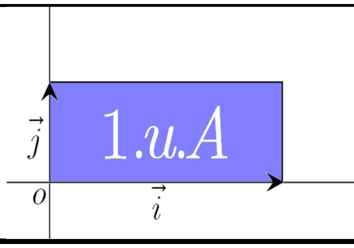
### ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

خاصية :

لتكن $u$ و $v$ دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال $I$ حيث $u'$ و $v'$ متصلتان على $I$ و $a$ و $b$ عنصرين من $I$ لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

## IV. حساب المساحات :

| | |
|---|---|
| ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$<br>وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة $O$<br>و المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$<br>$1u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ |  |

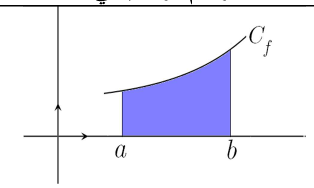
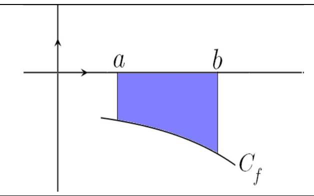
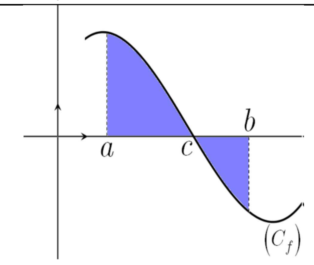
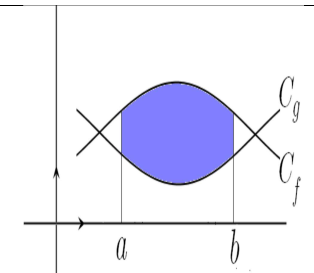
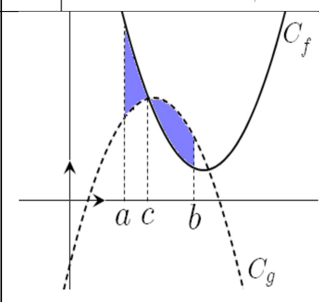
**خاصية 1:**

لتكن $f$ دالة متصلة على مجال $[a,b]$
مساحة الحيز المحصور بين $(C_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :
$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u.A$$

**خاصية 2:**

لتكن $f$ و $g$ دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$
مساحة الحيز المحصور بين $(C_f)$ و $(C_g)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :
$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)u.A$$

**حالات خاصة :**

| رسم توضيحي | ملاحظات | مساحة الحيز الملون في الرسم هي: |
|---|---|---|
|  | $f$ موجبة على المجال $[a,b]$ | $\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$ |
|  | $f$ سالبة على المجال $[a,b]$ | $\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$ |
|  | • $f$ موجبة على المجال $[a,c]$<br>و<br>• $f$ سالبة على المجال $[c,b]$ | $\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right)u.A$ |
|  | $(C_g)$ يوجد فوق $(C_f)$ على المجال $[a,b]$ | $\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right)u.A$ |
|  | • $(C_f)$ يوجد فوق $(C_g)$ على المجال $[a,c]$<br>و<br>• $(C_f)$ يوجد تحت $(C_g)$ على المجال $[c,b]$ | $\left(\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx\right)u.A$ |

## .V حساب الحجوم :

### خاصية 1:

ليكن $(\Sigma)$ مجسما محصورا بين المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ اللذين معادلتاهما على التوالي : $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$
و لتكن $S(t)$ مساحة تقاطع المجسم $(\Sigma)$ مع المستوى الذي معادلته $z=t$ حيث $a\leq t\leq b$
إذا كانت الدالة : $t\mapsto S(t)$ متصلة على المجال $[a,b]$ فإن $V$ حجم المجسم $(\Sigma)$ هو $V=\int_a^b S(t)dt$ بوحدة قياس الحجم.

### خاصية 2:

حجم المجسم المولد بدوران $(C_f)$ حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a,b]$ هو :
$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right]u.v$ حيث : $u.v$ : وحدة الحجوم