السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	الحساب التكاملي حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : احسب التكاملات التالية :

$$I=\int_1^2 \left(x^2+7\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+7x\right]_1^2=\left(\frac{8}{3}+14\right)-\left(\frac{1}{3}+7\right)=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}+14-7=\frac{7}{3}+7=\frac{28}{3}$$

$$I=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\left[\ln(|x|)-2\sqrt{x}\right]_1^2=\left(\ln(2)-2\sqrt{2}\right)-\left(\ln(1)-2\right)=\ln(2)-2\sqrt{2}+2$$

$$I=\int_0^1\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x+3}\right)dx=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{x+3}\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\ln(|x+3|)\right]_0^1=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\ln(|x+3|)\right]_0^1$$

$$I=\left(\frac{2}{3}+\ln(4)\right)-\left(0+\ln(3)\right)=\frac{2}{3}+\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

يجب تحويل الجذر المربع لصيغته الأسية لكي نحصل على تكامل اعتيادي $x^r\rightarrow\frac{x^{r+1}}{r+1}$

$$I=\int_0^1\left(x^2+1\right)^2dx=\int_0^1\left(x^4+2x^2+1\right)dx=\left[\frac{x^5}{5}+2\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)-\left(0+0+0\right)=\frac{3+10+15}{15}=\frac{28}{15}$$

لا يمكن الحساب مباشرة، لذلك ننشر أولا

$$I=\int_0^{\frac{®}{4}}\sin(x)+\cos(3x)dx=\left[-\cos(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\frac{®}{4}}=\left(-\cos\left(\frac{®}{4}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3®}{4}\right)\right)-\left(-1+0\right)$$

$$I=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}+1=\frac{3-\sqrt{2}}{3}$$

$$I=\int_0^{\ln(2)}e^{2x}+\frac{1}{e^{3x}}dx=\int_0^{\ln(2)}e^{2x}+e^{-3x}dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}+\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{\ln(2)}=\left(\frac{e^{2\ln(2)}}{2}-\frac{e^{-3\ln(2)}}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$I=\frac{e^{\ln(4)}}{2}-\frac{e^{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4}{2}-\frac{\frac{1}{9}}{3}-\frac{1}{6}=2-\frac{1}{27}-\frac{1}{6}=\frac{97}{54}$$

طبقنا إحدى خاصيات الدالة الأسية لكي نحصل على تكامل اعتيادي $e^{ax}\rightarrow\frac{e^{ax}}{a}$

$$I=\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx=\int_0^1 x\times x^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right]_0^1=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$$

حذار أن تقوم بالبحث عن الدالة الأصلية لكل من x و $\sqrt{x}$ و تقوم بضرب الناتج، لأن هذه القاعدة غير صحيحة في الحساب التكاملي (الطريقة الصحيحة تسمى التكامل بالأجزاء)

$$I=\int_1^2\frac{1+x}{x^2}dx=\int_1^2\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}dx=\int_1^2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}dx=\left[\frac{-1}{x}+\ln(|x|)\right]_1^2=\left(\frac{-1}{2}+\ln(2)\right)-\left(-1+0\right)=\frac{1}{2}+\ln(2)$$

عندما لا يكون لدينا تكامل اعتيادي نبحث عن طرق أخرى للحصول على تكاملات اعتيادية

لاحظ بساطة الفكرة في هذا المثال.

$$I=\int_0^{\frac{®}{2}}\sin^2(x)dx=\int_0^{\frac{®}{2}}\frac{1-\cos(2x)}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{®}{2}}1-\cos(2x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{®}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{®}{2}-0\right)-\frac{1}{2}(0-0)=\frac{®}{4}$$

$$I=\int_0^{\ln(3)}\sqrt{e^x}\,dx=\int_0^{\ln(3)}\left(e^x\right)^{\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^{\ln(3)}e^{\frac{x}{2}}\,dx=\left[\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\ln(3)}=\left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^{\ln(3)}=\left(2e^{\frac{\ln(3)}{2}}\right)-2=2e^{\ln(\sqrt{3})}-2=2\sqrt{3}-2$$

$$I=\int_0^1 3^x\,dx=\int_0^1 e^{x\ln(3)}\,dx=\left[\frac{e^{x\ln(3)}}{\ln(3)}\right]_0^1=\frac{e^{\ln(3)}-1}{\ln(3)}=\frac{2}{\ln(3)}$$

$a^x=e^{x\ln(a)}$

$$I=\int_0^1(x+1)\sqrt{x}\,dx=\int_0^1 x\sqrt{x}+\sqrt{x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)-(0+0)=\frac{16}{15}$$

الفكرة سبق التطرق لها في مثال سابق

$$I=\int_0^{\ln(2)}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\left[\ln\left(\left|e^x+1\right|\right)\right]_0^{\ln(2)}=\ln(3)-\ln(2)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

لاحظ أن البسط يمثل مشتقة المقام

$$I=\int_0^{\frac{\text{®}}{4}}\tan(x)\,dx=\int_0^{\frac{\text{®}}{4}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx=\int_0^{\frac{\text{®}}{4}}-\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx=\left[-\ln\left(\left|\cos(x)\right|\right)\right]_0^{\frac{\text{®}}{4}}=-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\ln(1)=-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$I=\ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=\ln\left(\sqrt{2}\right)=\frac{\ln(2)}{2}$$

نفس الملاحظة السابقة لكن مع مراعاة الإشارة

السطر الأخير مجرد إضافة لتبسيط النتيجة

$$I=\int_0^{\frac{\text{®}}{2}}\sin^7(x)\cos(x)dx=\left[\frac{\sin^8(x)}{8}\right]_0^{\frac{\text{®}}{2}}=\frac{1}{8}$$

لاحظ أن التكامل على شكل $u(x)^n\ u'(x)\to\frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$

$$I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\left[\frac{1}{2}2\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$$

لاحظ أن التكامل على شكل $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\to 2\sqrt{u(x)}$

$$I=\int_1^e\frac{\ln(x)}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\times\ln(x)dx=\left[\frac{\ln(x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{1}{2}$$

لاحظ أن التكامل على شكل $u(x)\,u'(x)\to\frac{u(x)^2}{2}$

$$I=\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}(2x)e^{x^2}dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$$

لاحظ أن التكامل على شكل $u'(x)e^{u(x)}\to e^{u(x)}$

$$I=\int_0^{\ln(2)}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln(2)}\frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln(2)}1-\frac{e^x}{e^x+1}dx=\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^{\ln(2)}$$

$$I=(\ln(2)-\ln(3))-(0-\ln(2))=2\ln(2)-\ln(3)=\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

لاحظ بساطة الفكرة و الاستفادة من حل تكامل سابق

$$I=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln(x)}\,dx=\int_e^{e^2}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx=\left[\ln\left(\left|\ln(x)\right|\right)\right]_e^{e^2}=\ln\left(\ln\left(e^2\right)\right)-\ln(\ln(e))=\ln(2)$$

يتطلب دقة الملاحظة في التعبير الرياضي.

$$I=\int_0^1 \left|x^2+1\right|dx=\int_0^1 x^2+1\ dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

يمكن حذف رمز القيمة المطلقة لكونه يتضمن تعبيرا موجبا

$$I=\int_0^1 \left|x-1\right| dx=\int_0^1 -x+1\ dx=\left[\frac{-x^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

بما أن: $0\le x\le 1$ فإن : $x-1\le 0$ أي: $|x-1|=-x+1$

$$I=\int_0^2 |x-1|\ dx=\int_0^1 |x-1|\ dx+\int_1^2 |x-1|\ dx=\int_0^1 -x+1\ dx+\int_1^2 x-1\ dx$$

$$I=\left[\frac{-x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=\left(\frac{-1}{2}+1\right)-(0+0)+\left(\frac{4}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

التعبير $x-1$ يغير الإشارة على المجال $[0,2]$ لذلك استعملنا علاقة شال و قسمنا المجال لمجالات يمكن فيها تحديد إشارة التعبير.

$$I=\int_0^{®} |\cos(x)|\ dx=\int_0^{\frac{®}{2}} |\cos(x)|\ dx+\int_{\frac{®}{2}}^{®} |\cos(x)|\ dx=\int_0^{\frac{®}{2}} \cos(x)\ dx+\int_{\frac{®}{2}}^{®} -\cos(x)\ dx$$

$$I=\left[\sin(x)\right]_0^{\frac{®}{2}}+\left[-\sin(x)\right]_{\frac{®}{2}}^{®}=1-0+0-(-1)=2$$

نفس الملاحظة السابقة

تمرين 2 :

1

لدينا :
$$a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-3}=a+\frac{bx-3b+cx+c}{(x+1)(x-3)}==\frac{ax^2-2ax-3a+bx-3b+cx+c}{x^2-2x-3}$$

منه : $\forall x\in IR_{-\{-1,3\}}\quad ax^2+(-2a+b+c)x+(-3a-3b+c)=-3x^2+7x+2$

منه : $\begin{cases}a=-3\\-2a+b+c=7\\-3a-3b+c=2\end{cases}$ منه : $\begin{cases}a=-3\\b+c=1\\-3b+c=-7\end{cases}$ منه : $\begin{cases}a=-3\\c=1-b\\4b=8\end{cases}$ منه : $\begin{cases}a=-3\\c=-1\\b=2\end{cases}$

2

$$I=\int_0^2\frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}\ dx=\int_0^2 -3+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-3}\ dx=\left[-3x+2\ln(|x+1|)-\ln(|x-3|)\right]_0^2$$

$$I=-6+2\ln(3)+\ln(3)=3\ln(3)-6$$

تمرين 3 :

1

$$\forall x\in IR\quad \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^x(e^x-e^{-x})}{e^x(e^x+e^{-x})}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

2

$$I=\int_0^1\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\ dt=\int_0^1\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}dt=\int_0^1\frac{(e^t+e^{-t})'}{e^t+e^{-t}}dt=\left[\ln(e^t+e^{-t})\right]_0^1=\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$$

لاحظ أهمية السؤال المساعد

تمرين 4 :

لدينا : $\forall x\in[-1,+\infty[\ \left(\sqrt{x+1}\right)^3-\sqrt{x+1}=(x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=x\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=x\sqrt{x+1}$

$$I=\int_0^1 t\sqrt{t+1}\;dt=\int_0^1\left(\sqrt{t+1}\right)^3-\sqrt{t+1}\;dt=\int_0^1 (t+1)^{\frac{3}{2}}-(t+1)^{\frac{1}{2}}\;dt=\left[\frac{(t+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$I=\left(\frac{2}{5}\times 2^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}\times 2^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{5}\sqrt{2}-\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{-4}{15}=\frac{-16}{15}\sqrt{2}+\frac{4}{15}=\frac{4-16\sqrt{2}}{15}$$

أثناء التبسيط : $2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{2^5}=\sqrt{2^4\times 2}=4\sqrt{2}$

تمرين 5 : نعتبر التكاملين : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^x\,dx$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,e^x\,dx$

1

لدينا: $g'(x)=\left(\sin(x)e^x\right)'=\left(\sin(x)\right)'e^x+\sin(x)\left(e^x\right)'=\cos(x)e^x+\sin(x)e^x$

إذن: $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)e^x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^x+\sin(x)e^x\,dx=\left[g(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{2}}$

2

لدينا: $h(x)=\left(\sin(x)e^{-x}\right)'=\left(\sin(x)\right)'e^{-x}+\sin(x)\left(e^{-x}\right)'=\cos(x)e^x-\sin(x)e^x$

إذن: $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)e^x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^x-\sin(x)e^x\,dx=\left[h(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}$

3

$$\begin{cases}I+J=e^{\frac{\pi}{2}}\\ I-J=e^{-\frac{\pi}{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2I=e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}\\ 2J=e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}\\ J=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}\end{cases}$$