تمارين

تمرين1

1- حدد a ; b ; c حيث $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;3\}$ $\dfrac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-3}$

أحسب $\displaystyle\int_0^2\frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}dx$

2- أحسب $\displaystyle\int_0^1\frac{x^4+x^2+3}{x^2+1}dx$ و $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx$

3- بين أن $\forall x\in\mathbb{R}$ $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

أحسب $\displaystyle\int_0^x\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}dt$

تمرين2

1- باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$; $\displaystyle\int_0^1x^2\ln\left(x^2+1\right)dx$ $\displaystyle\int_0^{\ln 2}(x+2)e^{2x}dx$

و $\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$

2- حدد الدالة الأصلية لـ $x\to\sin^3 x$ التي تنعدم في0 على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^3 dx$

تمرين3

نعتبر $I_n=\displaystyle\int_0^1x^ne^x\,dx$

1- أحسب I_1

2- بين $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ باستعمال المكاملة بالأجزاء.

3- أحسب I_2 I_3

4- أستنتج $\displaystyle\int_0^1\left(x^3+2x^2-2x\right)e^x\,dx$

تمرين4

1- بين أن $1-x\le\dfrac{1}{1+x}\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

2- استنتج $x-\dfrac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

3- استنتج تأطيرا لـ $\displaystyle\int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx$ إلى 0,1.

تمرين9

1- تحقق أن $\dfrac{2}{x\left(x^2+1\right)}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2x}{x^2+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

2- نعتبر $k\in[0;1]$.

باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $A_k=\displaystyle\int_k^1\frac{2x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

حدد $\lim A_k$

تمرين10

1- أ- تأكد أن $\dfrac{t^2-t+1}{t\left(t^2+1\right)}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+1}$

ب- أحسب $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{t^2-t+1}{t\left(t^2+1\right)}dt$

2- أحسب $\displaystyle\int_0^1\left(3x^2+2x+1\right)\ln\left(x+1\right)dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء

تمرين11

1- تأكد أن $\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

2- أحسب $I\left(\alpha\right)=\displaystyle\int_\alpha^1\dfrac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء حيث $\alpha\in\left]0;1\right[$

3- أحسب $\displaystyle\lim_{\alpha\to0^+}I\left(\alpha\right)$

تمرين12

نعتبر $n\in\mathbb{N}^*$ و $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\left(\sin x\right)^n}{\cos x}dx$; $I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\cos x}dx$

1- أحسب I_1 و استنتج I_3 ; I_5

2- أحسب $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin x\right)^n\cos x\,dx$ و استنتج $I_{n+2}-I_n$ بدلالة n.

3- أ- بين أن الدالة $x\to\ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$ دالة أصلية للدالة $x\to\dfrac{1}{\cos x}$ على $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$

ب- استنتج I_0 ثم I_2 ; I_4