

سلسلة 3	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية													
تمرين 1 :															
<p>لنحل المعادلة: $z^2 + 3z - 4 = 0$ لدينا: $\Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2$ منه: $z_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$ و $z_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$ بالتالي: $S = \{1; -4\}$</p>															
<p>لنحل المعادلة: $z^2 + 2z + 1 = 0$ ، لدينا: $\Delta = 4 - 4 = 0$ منه: $z_1 = z_2 = \frac{-2}{2} = -1$ بالتالي: $S = \{-1\}$</p>															
<p>لنحل المعادلة: $z^2 - 6z + 10 = 0$ لدينا: $\Delta = 36 - 40 = -4 = (2i)^2$ منه: $z_1 = \frac{6+2i}{2} = 3+i$ و $z_2 = \frac{6-2i}{2} = 3-i$ بالتالي: $S = \{3+i; 3-i\}$</p>															
<p>لنحل المعادلة: $z^2 + 49 = 0$ ، لدينا: $z^2 + 49 = 0 \Leftrightarrow z^2 - (-49) = 0 \Leftrightarrow z^2 - (7i)^2 = 0 \Leftrightarrow (z - 7i)(z + 7i) = 0 \Leftrightarrow z = 7i \text{ ou } z = -7i$ بالتالي: $S = \{7i; -7i\}$</p>															
<p>يمكن أيضا استعمال المعادلة حيث: $a = 1$ و $b = 0$ و $c = 49$</p>															
<p>لنحل المعادلة: $z^3 + 1 = 0$ ، لدينا: $z^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2 - z + 1) = 0 \Leftrightarrow (z+1=0) \text{ ou } (z^2 - z + 1 = 0)$ ولدينا بالنسبة للمعادلة: $z^2 - z + 1 = 0$: $\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$ منه: $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ بالتالي: $S = \left\{-1; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$</p>															
<p>للتذكير لحل المعادلة: $az^2 + bz + c = 0$ في C حيث a و b و c أعداد حقيقية نحسب المحددة $\Delta = b^2 - 4ac$ و نكتبها على شكل مربع $(\Delta = u^2)$ (إذا كان Δ سالبا ندرج العدد i للحصول على مربع) ثم يكون الحلان: $z_2 = \frac{-b-u}{2}$ و $z_1 = \frac{-b+u}{2}$ لا يصح الآن كتابة: $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$ لأن Δ قد لا يكون عددا حقيقيا والجزء المربع هو تعريف يخص الأعداد الحقيقية</p>															
تمرين 2 : $P(z) = z^3 - 7z^2 + 25z - 39$															
1	لدينا: $P(3) = 27 - 63 + 75 - 39 = 0$ إذن 3 جذر للحدودية $P(z)$														
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">$z^3 - 7z^2 + 25z - 39$</td> <td style="text-align: left;">$z - 3$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">$\underline{z^3 - 3z^2}$</td> <td style="text-align: left;">$z^2 - 4z + 13$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">$0 - 4z^2 + 25z$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">$\underline{-4z^2 + 12z}$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">$0 \quad 13z - 39$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">$\underline{13z - 39}$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">0</td> <td></td> </tr> </table>	$z^3 - 7z^2 + 25z - 39$	$z - 3$	$\underline{z^3 - 3z^2}$	$z^2 - 4z + 13$	$0 - 4z^2 + 25z$		$\underline{-4z^2 + 12z}$		$0 \quad 13z - 39$		$\underline{13z - 39}$		0		<p>بإجراء القسمة الإقليدية لـ $P(z)$ على $z - 3$ نستنتج أن: $a = 1$ و $b = -4$ و $c = 13$</p>
$z^3 - 7z^2 + 25z - 39$	$z - 3$														
$\underline{z^3 - 3z^2}$	$z^2 - 4z + 13$														
$0 - 4z^2 + 25z$															
$\underline{-4z^2 + 12z}$															
$0 \quad 13z - 39$															
$\underline{13z - 39}$															
0															
3	<p>لدينا: $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 3 = 0) \text{ ou } (z^2 - 4z + 13 = 0)$ ولدينا بالنسبة للمعادلة: $z^2 - 4z + 13 = 0$: $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$ منه: $z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i$ و $z_2 = \frac{4-6i}{2} = 2-3i$ بالتالي: $S = \{3; 2+3i; 2-3i\}$</p>														

تمرين 3 :

لدينا : $z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2 + 1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 + 1 = z \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$

و $\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$ منه ، $z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

بالتالي : $S = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$

2 $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1 ; \frac{-f}{3} \right] = e^{\frac{-f}{3}i}$ ، $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1 ; \frac{f}{3} \right] = e^{\frac{f}{3}i}$

تمرين 4 :

1 لنحل في C المعادلة : $z^2 + 2z + 2 = 0$ ، لدينا $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$

منه : $z_1 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$ و $z_2 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$ بالتالي : $S = \{ -1 + i ; -1 - i \}$

2 $z_1 = -1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \left[\sqrt{2} ; \frac{3f}{4} \right] = \sqrt{2} e^{\frac{3f}{4}i}$

$z_2 = -1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \left[\sqrt{2} ; \frac{5f}{4} \right] = \sqrt{2} e^{\frac{5f}{4}i}$

3 $K = z_1^8 + z_2^8 = \left(\sqrt{2} e^{\frac{3f}{4}i} \right)^8 + \left(\sqrt{2} e^{\frac{5f}{4}i} \right)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{\frac{3f}{4}i \times 8} + (\sqrt{2})^8 e^{\frac{5f}{4}i \times 8} = 16e^{6fi} + 16e^{10fi} = 16 + 16 = 32$

للتذكير $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ و كحالة خاصة : $e^{2kf} = \cos(2kf) + i \sin(2kf) = 1$

تمرين 5 :

1 لنحل في C المعادلة $z^2 + 4\sqrt{3}z + 16 = 0$ ، لدينا $\Delta = 16 \times 3 - 4 \times 16 = 48 - 64 = -16 = (4i)^2$

منه : $z_1 = \frac{-4\sqrt{3} + 4i}{2} = -2\sqrt{3} + 2i$ و $z_2 = \frac{-4\sqrt{3} - 4i}{2} = -2\sqrt{3} - 2i$

بالتالي : $S = \{ -2\sqrt{3} + 2i ; -2\sqrt{3} - 2i \}$

2 $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i = 4 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \left[4 ; \frac{5f}{6} \right] = 4e^{\frac{5f}{6}i}$

$z_2 = -2\sqrt{3} - 2i = 4 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \left[4 ; \frac{7f}{6} \right] = 4e^{\frac{7f}{6}i}$

$A(z_1)$ و $B(z_2)$ نعتبر الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{f}{3}$

3 أ) نعلم أن الصيغة العقدية للدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{f}{3}$ هي : $z' = e^{\frac{f}{3}i}(z - z_0) + z_0$

أي : $z' = e^{\frac{f}{3}i}z$ منه : $z_{A'} = e^{\frac{f}{3}i}z_A = e^{\frac{f}{3}i} \times 4e^{\frac{5f}{6}i} = 4e^{\left(\frac{f}{3} + \frac{5f}{6}\right)i} = 4e^{\frac{7f}{6}i}$

ب) نستنتج من السؤال السابق أن $z_{A'} = z_B$ أي أن B هي صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{f}{3}$ ، و ذلك يعني أن المثلث OAB متساوي الأضلاع.

تمرين 6 : $A(2+i)$ و $B(5+2i)$ و $C(1+4i)$.

1 التمثيل العقدي للدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{f}{2}$ هو : $z' = e^{\frac{f}{2}i} (z - z_A) + z_A$

أي : $z' = i(z - 2 - i) + 2 + i$ أي $z' = i z - 2i + 1 + 2 + i$ أي $z' = i z + 3 - i$

$$z_{B'} = i z_B + 3 - i = i(5 + 2i) + 3 - i = 5i - 2 + 3 - i = 1 + 4i = z_C$$

2 إذن صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{f}{2}$ هي النقطة C

بالتالي ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في النقطة A

تمرين 7 :

$$\begin{aligned} \cos^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta})$$

$$= \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}))$$

$$= \frac{1}{8} (2\cos(3\theta) + 3 \times 2\cos(\theta))$$

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos(\theta)$$

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta) \cos(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \\ &= \frac{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta} \times e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{-4} \times \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{8} (e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}) (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$= \frac{-1}{8} (e^{3i\theta} + e^{i\theta} - 2e^{i\theta} - 2e^{-i\theta} + e^{-i\theta} + e^{-3i\theta})$$

$$= \frac{-1}{8} (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} - e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$= \frac{-1}{8} (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} - (e^{i\theta} + e^{-i\theta}))$$

$$= \frac{-1}{8} (2\cos(3\theta) - 2\cos(\theta))$$

$$\sin^2(\theta) \cos(\theta) = \frac{-1}{4} \cos(3\theta) + \frac{1}{4} \cos(\theta)$$

أثناء الاخطاط نستعمل قواعد الترميز الأسّي الشبيه بقواعد القوى : $(e^a)^n = e^{na}$ ، $e^a \times e^{-a} = 1$ ، $e^a \times e^b = e^{a+b}$

2 هي دالة أصلية للدالة : $f(x) = \cos^3(x) = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)$

الدالة : $F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x)$

$F(x) = \frac{1}{12} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x)$

$$g(x) = \sin^2(x)\cos(x)$$

$$g(x) = \frac{-1}{4}\cos(3x) + \frac{1}{4}\cos(x) \quad \text{هي دالة أصلية للدالة :}$$

$$G(x) = \frac{-1}{4} \times \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(x)$$

الدالة :

$$G(x) = \frac{-1}{12} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(x)$$

كثير من التكاملات التي تتضمن قوى أو جذاء دوال مثلثية يتم حسابها بعد إخطاط الدالة عن طريق الأعداد العقدية، لأن هذا الأخير يحول تعبير الدالة إلى مجموع أو فرق دوال من الشكل : $r \sin(ax+b)$ أو

$r \cos(ax+b)$ والتي نعرف مسبقا دوالا أصلية لها، فالدالة $x \mapsto \frac{-r}{a} \cos(ax+b)$ هي دالة أصلية للدالة

$x \mapsto r \sin(ax+b)$ و الدالة $x \mapsto \frac{r}{a} \sin(ax+b)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto r \cos(ax+b)$

رياضيات النجـاح أذ سمير لخريسي