أكاديمية الجهة الشرقية

سلسلة 11 :الأعداد العقدية" الجزء الثاني"

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية: 1) $z^2=5$ 2) $z^2=-4$ 3) $z^2=-3$

تمرين2: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

1) $z^2-z+2=0$

2) $z^2-z-2=0$

3) $z^2-2z+1=0$

تمرين3: لكل z من $\mathbb{C}$, نضع: $P(z)=z^2-2z+2$

1. أحسب $P(1-i)$
2. استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$

تمرين 4: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين:

1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$ 2) $z^2-6z+13=0$

تمرين5: نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$, المعادلة:

$$(E): z^3+2\left(\sqrt{3}-1\right)z^2+4\left(1-\sqrt{3}\right)z-8=0$$

1. بين أن العدد 2 حل للمعادلة (E)
2. بين أن لكل z من $\mathbb{C}$, لدينا:

$$z^3+2\left(\sqrt{3}-1\right)z^2+4\left(1-\sqrt{3}\right)z-8=(z-2)\left(z^2+2\sqrt{3}z+4\right)$$

3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

تمرين6: حدد الترميز الأسي للعدد العقدي $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

الجواب: ليكن: , لدينا: $|z|=2$ و $\arg z\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ إذن

$z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ هو الترميز الأسي للعدد العقدي z

تمرين7: أعط شكلا أسيا لكل عدد من الأعداد التالية:

1) $z_1=2+2i$ 2) $z_2=1-i\sqrt{3}$ 3) $z_1\times z_2$

4) $\frac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

تمرين8: بين أن: $\cos^2\theta=\frac{\cos 2\theta+1}{2}$ لكل θ من $\mathbb{R}$

تمرين9: بين أن: $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$ لكل θ من $\mathbb{R}$

تمرين10: بين أن: $\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

تمرين11: بين أن: $\sin^3\theta=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

تمرين12: بين أن: $\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$ لكل θ من $\mathbb{R}$

تمرين13: بين أن: $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ و $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

تمرين14: بين باستعمال صيغة موافر أن:

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

و أن: $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

تمرين15: **حل في** $\mathbb{C}$ **:** **-1** $2Z^2-2Z+5=0$ **-2** $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

تمرين16: $P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i$

1)بين أن $(E): P(Z)=0$ **تقبل حلا تخيلا صرفا** z_0 **يجب تحديده**

2) حل في $\mathbb{C}$ **:** $P(Z)=0$

تمرين17: **نعتبر :** $z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1)أ)حدد الشكل الأسي ل z **ب)حدد الشكل الجبري ل** z

2)استنتج $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$

تمرين18: I) 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$.

2)نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$.

a. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا

b. حدد الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث :

$P(z)=(z-2i)\left(az^2+bz+c\right)$.

c. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

II) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي :

$z_A=4+i$; $z_B=4-i$; $z_C=-i$

1. مثل النقط A و B و C .
2. لتكن Ω النقطة ذات اللحق 2

نسمي S صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$ حدد لحق النقطة S.

3. بين أن النقط B و A و S و C تنتمي إلى نفس دائرة (Γ) ينبغي تحديد مركزها و شعاعها

أرسم (Γ).

تمرين19 : في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما : $z_A=i$; $z_B=2$

I. 1) حدد لحق النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{2}$.

2) حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

3) مثل النقط A و B و B' .

II.

نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z'=(1+i)z+1$.

1) حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ ـ بين أنه $\frac{z'-z}{i-z}=-i$ لكل z مخالف للعدد i.

ب ـ بين أن : $\begin{cases} MM'=MA \\ \left(\overline{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MM'}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ لكل نقطة M مخالفة للنقط A .

ج ـ استنتج طريقة لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M حيث $M\neq A$.

3) حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $|z-2|=\sqrt{2}$.

4) أ ـ بين أن : $z'-3-2i=(1+i)(z-2)$ لكل عدد عقدي z .

ب ـ استنتج أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Γ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

تمرين20:المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط I ; A ; B التي ألحاقها على التوالي هي 1 ; $1-2i$; $-2+2i$. لتكن (C) الدائرة التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

1) أنشئ النقط I ; A ; B.

2) حدد z_Ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (C) . احسب شعاع الدائرة (C) .

3) لتكن D النقطة ذات اللحق $z_D=\frac{3+9i}{4+2i}$.

حدد الشكل الجبري للعدد z_D ثم بين أن النقطة D تنتمي للدائرة (C) .

4) لتكن E ، النقطة ذات اللحق z_E ، التي تنتمي للدائرة (C) و التي تحقق $\left(\overline{\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

5) أ ـ حدد معيار و عمدة العدد $z_E+\frac{1}{2}$.

ب ـ استنتج أن $z_E=\frac{5\sqrt{2}-2}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}i$.

تمرين21 :في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C و D و E اللتي ألحاقها على التوالي هي : $z_A=1-i$ و $z_B=3+i$ و $z_C=-3$ و $z_D=2$ و $z_E=-4$.

نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z'=(1+i)z+1$.

1) حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ ـ بين أن $OMEM'$ متوازي الأضلاع إذا، و فقط إذا، كان $z^2-3z+3=0$.

ب ـ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-3z+3=0$.

3) أ ـ عبر عن $z'+4$ بدلالة $z-2$.

ب ـ استنتج أن $|z'+4|=|z-2|^2$ ثم عبر $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$.

ج ـ بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و شعاعها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها.

تمرين22 :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2+z+1=0$

2) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (F): $z^2=\bar{z}$

أ- بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة (F) فإن $z=0$ أو $|z|=1$

ب- بين أن المعادلة (F) تكافئ المعادلة: $z^3=1$ أو $z=0$

3) حل المعادلة (F) في $\mathbb{C}$.

تمرين23 :في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط :

– النقطة A ذات اللحق $a=7-i\sqrt{3}$.

– النقطة B ذات اللحق $b=5+3i\sqrt{3}$.

– النقطة Q منتصف القطعة [OB] .

1) أ ـ ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$. حدد الكتابة العقدية للدوران R .

ب ـ بين أن $R(A)=B$ ثم استنتج طبيعة أن المثلث OAB.

2) حدد q لحق النقطة Q .

3) حدد k لحق النقطة K بحيث يكون ABQK متوازي الأضلاع .

4) بين أن $\frac{k-a}{k}$ تخيلي صرف . ما ذا نستنتج بالنسبة للمثلث OKA ؟

5) لتكن C النقطة ذات اللحق $c=\frac{2a}{3}$ ؟

أ ـ أحسب $\frac{k-b}{k-c}$.

ب ـ ما ذا نستنتج بالنسبة للنقط B و C و K ؟

تمرين24: 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية كل من المعادلتين التاليتين :

أ ـ $z^4=1$ (يمكن ملاحظة أن $z^4-1=(z^2-1)(z^2+1)$)

ب ـ $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4=1$

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و ليكن A عددا عقديا .

نعتبر المعادلة ذات المجهول العقدي z :

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n=A \quad . (E)$$

P و Q و M هي النقط ذات الألحاق i و $-i$ و z على التوالي .

أ ـ بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن $\sqrt[n]{|A|}=\frac{MP}{MQ}$.

ب ـ بين أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي على الأقل فإن $|A|=1$.

ج ـ استنتج أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي فإن جميع حلولها حقيقية .

تمرين25: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتان لحقاهما على التوالي هما : $z_A=1$; $z_B=-2$.

نربط كل عدد عقدي z مخالف ل -2 بالعدد Z المعرف ب : $Z=\frac{z-1}{z+2}$.

1) حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z في كل من الحالتين التاليتين :

أ ـ $|Z|=1$ ب ـ $Z\in\mathbb{R}$

2) أ ـ بين أنه لكل z مخاف ل -2 لدينا : $(Z-1)(z+2)=-3$

ب ـ نعتبر النقطة M ذات اللحق z و النقطة M' التي لحقها Z .

بين أن : $M'\neq A$ ثم حدد $AM'\times BM$ و $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{AM'})}+\overline{(\vec{u},\overrightarrow{BM})}$.

ج ـ علما أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها B و شعاعها 3 بين أن M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

3) أ ـ حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $Z\in i\mathbb{R}$.

ب ـ لكل عدد حقيقي غير منعدم x نضع $d=\frac{1+2ix}{1-ix}$ و نسمي D النقطة ذات اللحق d .

حدد الشكل الجبري للعدد $\frac{d-1}{d+2}$ ثم استنتج أن النقطة D تنتمي ل (Γ) .

ج ـ ليكن θ عنصرا من المجال $]-\pi,\pi[$. نضع $f=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{i\theta}$ و نسمي F النقطة ذات اللحق f .

* بين أن العدد $U=\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ تخيلي صرف .

* بين أن $\frac{f-1}{f+2}=U$. ماذا نستنتج بالنسبة للنقطة F ؟

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe. c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien