أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مادة الرياضيات	الأستاذ : عثماني نجيب مذكرة رقم 7/

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 7 في درس الأعداد العقدية(1)

محتوى البرنامج

- مجموعة الأعداد العقدية
- التمثيل الهندسي لعدد عقدي (لحق نقطة ومتجهة)
- الكتابة الجبرية لعدد عقدي
- العمليات على الأعداد العقدية
- مرافق عدد عقدي والخصائص
- معيار عدد عقدي والخصائص
- مرافق عدد عقدي والخصائص
- العمدة و الشكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم و الخصائص
- زاوية متجهتين و عمدة خارج لحقيهما
- التعبير عقديا عن الإزاحة و التحاكي و الدوران

القدرات المنتظرة

- التمكن من الحساب على الأعداد العقدية
- الانتقال من الكتابة الجبرية إلى الكتابة المثلثية والعكس
- التعرف على الصيغ المثلثية الأساسية باستعمال الأعداد العقدية
- تطبيق الأعداد العقدية في حل مسائل هندسية (الاستقامية التعامد والتعبير عقديا عن الإزاحة و التحاكي و الدوران)

I. المجموعة $\mathbb{C}$

تعريف: كل عدد يكتب على الشكل $x+iy$, حيث عددان حقيقيان و i العدد التخيلي الذي يحقق $i^2=-1$, يسمى عددا عقديا. مجموعة الأعداد العقدية يرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$. و لدينا:

$\mathbb{C}=\left\{x+iy\,/\,(x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$ حيث $i^2=-1$

II. الكتابة الجبرية لعدد عقدي

خاصية و تعريف

- كل عدد عقدي z يكتب بكيفية وحيدة على الشكل. $x+iy$, حيث x و y عددان حقيقيان,
- الكتابة $z=x+iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z.
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ,و يرمز له بالرمز $\mathrm{Re}(z)$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد z ,و يرمز له بالرمز $\mathrm{Im}(z)$.

خاصية: يكون عددان عقديان z و. z' متساويين اذا و فقط اذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

$z=z'\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ و. $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$.

ملاحظة: جميع قواعد الحساب المتعلقة بالعمليات في $\mathbb{R}$, تمتد الى المجموعة $\mathbb{C}$, مع استعمال $i^2=-1$.

تمرين1: أكتب الأعداد العقدية التالية على شكلهم الجبري أو الديكارتي:

$z_1=(2+i)(-1+i)+(1+2i)^2$ و $z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$

$z_3=\dfrac{1-3i}{3-i}$ و $z_4=\dfrac{1+i}{3-i}$ و $z_5=(1+i)^{10}$

أجوبة : 1) $z_1=(2+i)(-1+i)+(1+2i)^2=-2+2i-i-1+1+4i-4$

$z_1=-6+5i=a+bi$ ومنه : $\mathrm{Re}(z_1)=-6$ و $\mathrm{Im}(z_1)=5$

2) $z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=1^3+3\times1^2\times\left(\sqrt{3}i\right)+3\times1\times\left(\sqrt{3}i\right)^2+\left(\sqrt{3}i\right)^3$

$z_2=1+3\sqrt{3}i-3\times3-3\sqrt{3}i=-8+0i\in\mathbb{R}$ عدد حقيقي

لأن : $\mathrm{Im}(z_2)=0$

3) $z_3=\dfrac{1-3i}{3-i}=\dfrac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{3+i-9i+3}{9-i^2}=\dfrac{6-8i}{10}$

$z_3=\dfrac{6}{10}-\dfrac{8i}{10}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4i}{5}$ ومنه : $\mathrm{Re}(z_1)=\dfrac{3}{5}$ و $\mathrm{Im}(z_1)=-\dfrac{4}{5}$

4) $z_4=\dfrac{1+i}{3-2i}=\dfrac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{3+2i+3i-2}{9-4i^2}=\dfrac{1+5i}{13}=\dfrac{1}{13}+i\dfrac{5}{13}$

5) $z_5=(1+i)^{10}=\left((1+i)^2\right)^5=(2i)^5=(2)^5\times(i)^5=32\times(i)^4\times i=32i$

III. التمثيل الهندسى لعدد عقدي:

تعريف: المستوى (P) منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

كل عدد عقدي $z=x+iy$, حيث x و y عددان حقيقيان, يربط بالنقطة M التي زوج احداثياتيها $(x;y)$ في المعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

نقول ان: M صورة العدد العقدي z , و نكتب: $M(z)$.

$\overrightarrow{OM}$ المتجهة الصورة للعدد العقدي z , و نكتب: $M(z)$.

كل نقطة $M(x;y)$ من المستوى (P) , هي صورة العدد العقدي $z=x+iy$ نقول ان: z لحق النقطة M و نكتب z_M أو لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ ونكتب $z_{\overrightarrow{OM}}$

المستوى (P) المنسوب الى المعلم المتعامد الممنظم المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ و يسمى المستوى العقدي.

1. مصطلحات:

كل عدد عقدي يكتب على شكل iy , حيث y عدد حقيقي, يسمى عددا تخيليا صرفا

محور الأفاصيل يسمى المحور الحقيقي و محور الأراتيب يسمى المحور التخيلي

2. لحق متجهة

تعريف: لحق متجهة $\vec{u}$ هو لحق النقطة M بحيث: $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$, أي: إذا كانت $\vec{u}(a,b)$ فان لحق المتجهة $\vec{u}$ هو العدد العقدي $a+ib$.

خاصية: إذا كانت A و B نقطتين من المستوى العقدي لحاقهما z_A و z_B على التوالي, فان لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو العدد العقدي. $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$

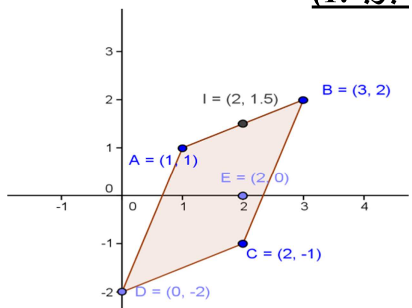
مثال1: نعتبر في المستوى العقدي النقط. $A(-2;1)$ و $B(-3;-1)$ و $C\left(\frac{1}{2};-2\right)$.

ما ألحاق النقط A و B و C؟

مثال2: نعتبر في المستوى العقدي النقط A, B, C, D و E ألحاقهم على التوالي: $z_A=1+i$ و $z_B=3+2i$, $z_C=2-i$ و $z_D=-2i$ و $z_E=2$

1. مثل النقط A, B, C, D و E في المستوى العقدي
2. حدد z_I لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$
3. حدد $z_{\overrightarrow{AB}}$ لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$
4. بين أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع

أجوبة:(1



I(2 منتصف القطعة $[AB]$ يعني $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

يعني $z_{\overrightarrow{AI}}=z_{\overrightarrow{IB}}$ يعني $z_I-z_A=z_B-z_I$ يعني $z_I=\frac{z_B+z_A}{2}$

ومنه: $z_I=\frac{3+2i+1+i}{2}=2+\frac{3}{2}i$ ومنه: $I\left(2;\frac{3}{2}\right)$

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=3+2i-(1+i)=3+2i-1-i=2+i$

4)يكفي أن نبين أن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

لدينا: $z_{\overrightarrow{AB}}=2+i$ نحسب $z_{\overrightarrow{DC}}=?$

$z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D=2-i-(-2i)=2+i$

ومنه: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$ ومنه: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ وبالتالي: ABCD متوازي الأضلاع

IV. تطبيقات

▪ **لحق منتصف قطعة**

خاصية: إذا كانت A و B نقطتين من المستوى العقدي لحقهما z_A و z_B على التوالي, فان لحق النقطة I منتصف $[AB]$ هو العدد العقدي z_I بحيث: $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

▪ **استقامية ثلاث نقط من المستوى العقدي**

خاصية

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي بحيث $A\neq C$ و ألحاقها z_A و z_B و z_C على التوالي.

تكون A و B و C نقطا مستقيمية إذا و فقط إذا كان: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ عددا حقيقيا.

مثال: نعتبر النقط: $A(1+i)$ و $B\left(\frac{1}{2}+2i\right)$ و $C(-1-i)$

هل النقط A و B و C مستقيمية؟

الجواب: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\frac{1}{2}+2i-i}{-1-i-i}=\frac{\frac{1}{2}+i}{-1-2i}=\frac{\frac{1}{2}+i}{-2\left(\frac{1}{2}+i\right)}=-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$

اذن: النقط A و B و C مستقيمية

V. مرافق عدد عقدي

1. تعريف

ليكن $z=x+iy$. عددا عقديا و حيث x و y عددان حقيقيان.

العدد العقدي $x-iy$ يسمى مرافق العدد العقدي z ونرمز له بالرمز $\bar{z}$.

أمثلة: $z_1=5-2i$ اذن : $\overline{z_1}=\overline{5-2i}=5+2i$

$\overline{3+2i}=3-2i;\overline{-5-3i}=-5+3i;\overline{2i}=-2i;\overline{-7}=-7$.

2. نتائج

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا, حيث. x و. y عددان حقيقيان,لدينا:

$\overline{\overline{z}}=z$ و $z\bar{z}=x^2+y^2$ (. $z\bar{z}$ عدد حقيقي موجب)

$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$. $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$

خاصية

ليكن z عددا عقديا لدينا:

1. z عدد حقيقي اذا وفقط اذا كان : $z=\bar{z}$
2. z عدد تخيلي صرف اذا وفقط اذا كان:. $\bar{z}=-z$.

3. المرافق و العمليات في المجموعة $\mathbb{C}$.

خاصية ليكن z و z' عددين عقديين و n عددا صحيحا نسبيا,لدينا:

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$. $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\overline{z'}$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$ و. $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\overline{z'}}{\bar{z}}$,حيث $z\neq 0$ $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$

تمرين2: ليكن z عددا عقديا.

حدد وأكتب بدلالة $\bar{z}$ مرافقات الأعداد العقدية التالية: $Z_1=(2+i)(5-i)$ و $Z_2=2z+5i$ و $Z_3=\frac{z-1}{-3z+i}$.

أجوبة: (1 $\overline{Z_1}=\overline{(2+i)(5-i)}=\overline{(2+i)}\times\overline{(5-i)}=(2-i)(5+i)$

$\overline{Z_2}=\overline{2z+5i}=\overline{2z}+\overline{5i}=2\bar{z}-5i$

$\overline{Z_3}=\overline{\left(\frac{z-1}{-3z+i}\right)}=\frac{\overline{z-1}}{\overline{-3z+i}}=\frac{\bar{z}-1}{-3\bar{z}-i}$

تمرين3: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين:

1. $2z+i\bar z=5-4i$
2. $z=2\bar z-2+6i$

أجوبة: (1 $z\in\mathbb{C}$ يعني $\exists x\in\mathbb{R}$ و $\exists y\in\mathbb{R}$ بحيث: $z=x+yi$

$$2z+i\bar z=5-4i \Leftrightarrow 2(x+yi)+i(x-yi)=5-4i$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)+i(2y+x)=5-4i \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=5\\2y+x=-4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=5\\-4y-2x=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=5\\-4y-2x+2x+y=8+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=5\\-3y=13\Leftrightarrow y=-\frac{13}{3}\end{cases}$$

وبتعويض y بقيمتها في المعادلة 1 نجد: $x=\frac{14}{3}$

ومنه: $S=\left\{\frac{14}{3}-\frac{13}{3}i\right\}$

2) بنفس الطريقة نستعمل الكتابة الجبرية: $z=x+yi$ فنجد:

$$z=2\bar z-2+6i \Leftrightarrow x+yi=2(x-yi)+-2+6i$$

$$\Leftrightarrow -x+3iy=-2+6i \Leftrightarrow \begin{cases}-x=-2\\3y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$$

ومنه: $S=\{2+2i\}$

تمرين4: نعتبر في المستوى العقدي العدد العقدي U

ولتكن M صورة العدد العقدي z ونضع: $U=(z-2i)(\bar z-1)$

نضع: $z=x+yi$ حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$

1) حدد بدلالة x و y الجزء الحقيقي والتخيلي للعدد العقدي U

2) حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون:

أ) U عددا حقيقيا

ب) U عددا تخيلي صرف

أجوبة: (1 $z=x+yi$ اذن: $U=(x+yi-2i)(x-yi-1)$

يعني $U=(x+i(y-2))((x-1)-yi)$ وبعد النشر نجد:

$$U=(x^2+y^2-x-2y)+i(-y-2x+2)$$

ومنه: : $\mathrm{Re}(U)=x^2+y^2-x-2y$ و $\mathrm{Im}(U)=-y-2x+2$

2)أ) U عدد حقيقي يعني $\mathrm{Im}(U)=0$ يعني $(\Delta): -y-2x+2=0$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) الذي معادلته: $-y-2x+2=0$

ب) U عدد تخيلي صرف يعني $\mathrm{Re}(U)=0$ يعني $x^2+y^2-x-2y=0$

$$x^2-2\times\frac12x+\left(\frac12\right)^2-\left(\frac12\right)^2+y^2-2\times1y+1^2-1^2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x-2y=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac12\right)^2+(y-1)^2=\frac54 \Leftrightarrow \left(x-\frac12\right)^2+(y-1)^2=\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2$$

اذن مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركزها $\Omega\left(\frac12;1\right)$ وشعاعها $R=\frac{\sqrt5}{2}$

VI. معيار عدد عقدي

1. تعريف

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا, حيث x و y عددان حقيقيان.

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{z\bar z}$ يسمى معيار العدد العقدي z, و نرمز له بالرمز $|z|$ و لدينا: $\sqrt{z\bar z}=\sqrt{x^2+y^2}$

ملحوظة

$(\forall z\in\mathbb{C}), |z|\in\mathbb{R}^+$.و $|z|^2=z\bar z$

مثال1: حدد معيار للعدد: $z=\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}$

الجواب : $|z|=\left|\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac12\right)^2+\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac14+\frac34}=\sqrt1=1$

أمثلة أخرى :

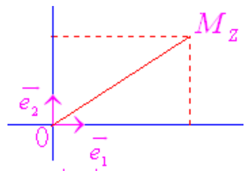
$|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5; |-2i|=\sqrt{(-2)^2}=2$.

2. التأويل الهندسي

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان)

لدينا: $M(x;y)$ و منه: $\|\overrightarrow{OM}\|=OM=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$

إذن معيار العدد العقدي z هو المسافة OM, أي: $OM=|z|$.



$|Z|=OM_z$

خاصية

لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي, لحقهما على التوالي z_A و z_B, لدينا: $\|\overrightarrow{AB}\|=AB=|z_B-z_A|$.

البرهان

نعتبر النقطة M التي تحقق: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$.

لدينا: z_M لحق النقطة M. حيث $z_M=z_B-z_A$ إذن:

$|z_B-z_A|=|z_M|=OM=AB$.

تمرين5: نعتبر في المستوى العقدي $(o;i,j)$ النقط A, B, C الحاقهم على التوالي: $z_A=2$ و $z_B=1+\sqrt3i$ و $z_C=3+i\sqrt3$

بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

الجواب: يكفي أن نبين أن: $AC=AB=BC$:

$$AB=|z_B-z_A|=|1+\sqrt3i-2|=|-1+\sqrt3i|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt3^2}=\sqrt4=2$$

$$AC=|z_C-z_A|=|3+\sqrt3i-2|=|1+\sqrt3i|=\sqrt{(1)^2+\sqrt3^2}=\sqrt4=2$$

$$BC=|z_C-z_B|=|3+\sqrt3i-1-\sqrt3i|=|2|=2$$

ومنه: $AC=AB=BC$ وبالتالي: المثلث ABC متساوي الأضلاع.

3. خاصيات

■ لكل عددين عقديين z و z' لدينا:

$|\bar z|=|-z|=|z|$ و $|z|=0\Leftrightarrow z=0$ و $|z\times z'|=|z|\times|z'|$.

■ إذا كان $z\neq0$ فإن: $\left|\frac1z\right|=\frac1{|z|}$ و $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$

■ إذا كان $z\neq0$ فإن لكل عدد صحيح نسبي n: $|z^n|=|z|^n$

و $|z+z'|\le|z|+|z'|$

تمرين6: حدد معيار كل من الأعداد العقدية التالية:

$z_1=5(1+i\sqrt3)$ و $z_2=(1+i)(\sqrt3-i)$ و $z_3=\left(\frac{1+i\sqrt3}{1-i}\right)^3$

الجواب : $|z_1|=|-5(1+i\sqrt3)|=|-5||1+i\sqrt3|=5\sqrt{1+3}=10$

$|z_2| = |(1+i)(\sqrt{3}-i)| = |1+i|\times|\sqrt{3}-i| = \sqrt{2}\times\sqrt{4} = 2\sqrt{2}$

$|z_3| = \left|\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3\right| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|^3 = \left(\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|\right)^3 = \left(\frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|}\right)^3$

$|z_3| = \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}\right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

تمرين7: تحديد (Δ) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث:

$|z-1-2i| = |z-7+2i|$

الجواب :طريقة 1:(طريقة تحليلية)

$z\in\mathbb{C}$ يعني $\exists x\in\mathbb{R}$ و $\exists y\in\mathbb{R}$ بحيث : $z=x+yi$

$|z-1-2i|=|z-7+2i|$ يعني $|x+yi-1-2i|=|x+yi-7+2i|$

يعني $|x-1+i(y-2)|=|x-7+i(y+2)|$

يعني $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y+2)^2}$

يعني $(x-1)^2+(y-2)^2=(x-7)^2+(y+2)^2$

يعني $x^2-2x+1+y^2-4y+4=x^2-14x+49+y^2+4y+4$ يعني $12x-8y-48=0$

يعني $(\Delta): 3x-2y-12=0$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) الذي معادلته: $3x-2y-12=0$

طريقة2:(طريقة هندسية)

$|z-1-2i|=|z-7+2i|$ يعني $|z-(1+2i)|=|z-(7-2i)|$

نضع : $A(z_A=1+2i)$ و $B(z_B=7-2i)$

اذن: $|z_M-z_A|=|z_M-z_B|$ يعني $AM=BM$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) واسط القطعة $[AB]$

تمرين8: تحديد (Δ) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث:

$|z-2i|=3$

الجواب :طريقة 1:(طريقة تحليلية)

$z\in\mathbb{C}$ يعني $\exists x\in\mathbb{R}$ و $\exists y\in\mathbb{R}$ بحيث : $z=x+yi$

$|z-2i|=3$ يعني $|x+yi-2i|=3$ يعني $|x+i(y-2)|=3$

يعني $\sqrt{x^2+(y-2)^2}=3$ يعني $(x-0)^2+(y-2)^2=3^2$

اذن مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركزها $\Omega(0;2)$ وشعاعها $R=3$

طريقة2:(طريقة هندسية)

$|z-2i|=3$ نضع : $A(z_A=2i)$

اذن: $|z_M-z_A|=3$ يعني $AM=3$

اذن مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركزها A وشعاعها $R=3$

VII.عمدة و شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم

1. عمدة عدد عقدي غير منعدم

تعريف

ليكن z عددا عقديا غير منعدم و M صورته في المستوى العقدي

نسمي عمدة العدد العقدي z أحد قياسات الزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$

و نرمز له بالرمز $\arg z$ و نكتب: $\arg z\equiv(\vec{u};\overrightarrow{OM})[2\pi]$.

تمرين: نعتبر النقط A و B و C و D و E و F التي ألحاقها على التوالي:

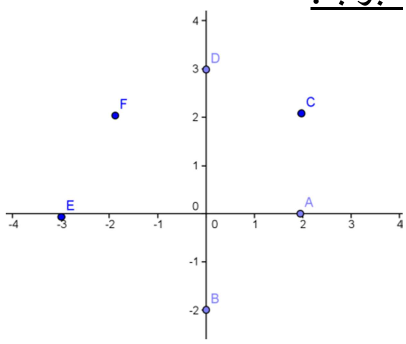
$z_A=2$ و $z_B=-2i$ و $z_C=2+2i$ و $z_D=3i$

$z_E=-3$ و $z_F=-2+2i$

أنشئ النقط A و B و C و D و E و F

باستعمال التمثيل في المستوى العقدي حدد عمدة كل عدد من الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C و z_D و z_E و z_F

الجواب :



$\arg z_A=0[2\pi]$ و $\arg z_B=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_C=\frac{\pi}{4}[2\pi]$ و $\arg z_D=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_E=\pi[2\pi]$ و $\arg z_F=\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

ملحوظة: العدد العقدي 0 ليس له عمدة

نتائج

- **عمدة عدد حقيقي:**

ليكن z عددا عقديا غير منعدم لدينا:

$z\in\mathbb{R}^{*+}\Leftrightarrow\arg z\equiv 0[2\pi]$.

$z\in\mathbb{R}^{*-}\Leftrightarrow\arg z\equiv\pi[2\pi]$.

$\arg z=k\pi;k\in\mathbb{Z}$ أو $z=0 \Leftrightarrow k\in\mathbb{R}$.

- **عمدة عدد تخيلي صرف:**

ليكن y عددا حقيقيا غير منعدم,لدينا:

إذا كان $y\succ 0$ فان: $\arg(iy)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

إذا كان $y\prec 0$ فان: $\arg(iy)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

خاصية: ليكن z عددا عقديا غير منعدم, لدينا:

o $\arg(-z)\equiv\pi+\arg z[2\pi]$

o $\arg\bar{z}\equiv-\arg z[2\pi]$

تمرين: حدد عمدة العدد العقدي z في كل حالة من الحالات التالية:

$z_1=5i$ و $z_2=-1$.

$z_3=-3i$ و $z_4=2$

2. شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم

تعريف ليكن z عددا عقديا غير منعدم,

الكتابة $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $r=|z|$ و $\theta\equiv\arg z[2\pi]$.تسمى شكلا مثلثيا للعدد العقدي z

مثال1: حدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي: $z_1=1+i\sqrt{3}$.

لدينا: $|z_1|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$z_1=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

مثال2: حدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي: $z_2=1-i$.

لدينا: $|z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$z_1 = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt2} - i\frac{1}{\sqrt2}\right) = \sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

اذن : $z_1 = \sqrt2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

مثال3: حدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي: $z_3 = -\frac{\sqrt3}{6}+\frac12 i$.

لدينا: $|z_3| = \sqrt{\frac{3}{36}+\frac14} = \sqrt{\frac13} = \frac{\sqrt3}{3}$

$z_3 = -\frac{\sqrt3}{6}+\frac12 i = \frac{\sqrt3}{3}\left(-\frac12 + i\frac{\sqrt3}{2}\right) = \frac{\sqrt3}{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(\pi-x)=-\cos x$ و $\sin(\pi-x)=\sin x$

اذن : $z_3 = \frac{\sqrt3}{3}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt3}{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

مثال4: حدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي: $z_3 = -1-\sqrt3 i$.

لدينا: $|z_3| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt3)^2} = \sqrt4 = 2$

$z_3 = -1-\sqrt3 i = 2\left(-\frac12 - i\frac{\sqrt3}{2}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(\pi+x)=-\cos x$ و $\sin(\pi+x)=-\sin x$

اذن : $z_4 = 2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

خاصية: ليكن. z عددا عقديا غير منعدم

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و. $r \succ 0$ فإن: . $|z| = r$ و

. $\arg z \equiv \theta[2\pi]$

تمرين9: حدد شكلا مثلثيا لكل من الأعداد العقدية التالية:

. $z_1 = \sqrt3+3i$, $z_2 = -2+2i$

. $z_3 = -\frac12 - i\frac{\sqrt3}{2}$,, $z_4 = \sqrt6 - i\sqrt2$

3. العمليات و عمدة عدد عقدي

خاصية: ليكن. z و z' عددين عقديين غير منعدمين, لدينا:

- $\arg(z\times z') \equiv \arg z + \arg z'[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{2}\right) \equiv -\arg z[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'[2\pi]$.
- $\arg(z^n) \equiv n\arg z[2\pi]$ لكل n من $\mathbb{Z}$

نتائج: ليكن z و z' عددين عقديين غير منعدمين, بحيث:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $z' = r(\cos\theta'+i\sin\theta')$ مع $r\succ 0$ و. $r'\succ 0$, لدينا:

- $-z = r(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi))$.
- $\bar z = r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$.
- $z\times z' = rr'(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))$
- $\frac1z = \frac1r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta'-\theta)+i\sin(\theta'-\theta))$
- $z^n = r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$ لكل. n من $\mathbb{Z}$.

تمرين110:العلاقة بين الشكل الجبري و شكل مثلثي لعدد عقدي

نعتبر العددين العقديين. $z_1 = \sqrt3 - i$ و $z_2 = 1-i$ و $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

1. أعط شكلا مثلثيا لكل من z_1 و z_2 و Z .
2. أكتب Z على الشكل الجبري ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الأجوبة:(1 $z_1 = \sqrt3 - i$

لدينا: $|z_1| = \sqrt{\sqrt3^2+(-1)^2} = \sqrt4 = 2$

$\sqrt3 - i = 2\left(\frac{\sqrt3}{2} - i\frac12\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

اذن : $z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

لدينا: $|z_2| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt2$

$z_2 = 1-i = \sqrt2\left(\frac{1}{\sqrt2} - i\frac{1}{\sqrt2}\right) = \sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

اذن : $z_2 = \sqrt2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{\sqrt2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

(2 $Z = \frac{\sqrt3 - i}{1-i} = \frac{(\sqrt3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt3+\sqrt3 i - i + 1}{2} = \frac{\sqrt3+1}{2}+i\frac{\sqrt3-1}{2}$

$$Z=\sqrt2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt3+1}{2}+i\frac{\sqrt3-1}{2}$$

يعني $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\frac{\sqrt3+1}{2}}{\sqrt2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\frac{\sqrt3+1}{2}}{\sqrt2}\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}\end{cases}$

VIII. زاوية متجهتين و عمدة خارج لحقيهما

1. خاصية

لتكن A و B و C و D نقطا من المستوى العقدي مثنى مثنى ألحاقها على التوالي. z_A و z_B و z_C و. z_D , لدينا:

- . $(\vec u; \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_A - z_B)[2\pi]$
- . $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$

2. **نتائج:** لتكن A و B و C و D نقطا من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى,ألحاقها. z_A و z_B و z_C و. z_D , لدينا:

❖ **استقامية ثلاث نقط**

تكون النقط. A و B و C مستقيمية اذا و فقط اذا كان:

$\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)\equiv 0[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)\equiv\pi[2\pi]$

❖ **توازي مستقيمين**

يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان اذا وفقط اذا كان:.

$\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)\equiv 0[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)\equiv\pi[2\pi]$.

❖ **تعامد مستقيمين**

يكون المستقيمان (AB) و (CD) متعامدين إذا وفقط إذا كان:

$\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

تمرين11:زاوية متجهتين

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي:
$z_A=3+5i$.و $z_B=3-5i$ و $z_C=7+3i$.

1)بين أن: $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2i$

2)استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية و أن $BC=2AC$

الجواب : 1) $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{-4-8i}{-4+2i}=\frac{2i(-4+2i)}{-4+2i}=2i$

2) $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\equiv\arg\left(\frac{z_B-z_c}{z_A-z_c}\right)[2\pi]$

$(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\equiv\arg(2i)[2\pi]$ يعني $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

اذن المثلث ABC قائم الزاوية في C

وجدنا أن : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2i$ اذن : $\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=|2i|$

اذن : $\frac{|z_B-z_C|}{|z_A-z_C|}=2$ اذن : $\frac{BC}{AC}=2$ اذن : $BC=2AC$

IX. تطبيقات : التعبير عقديا عن الإزاحة و التحاكي و الدوران

1 - الكتابة العقدية للإزاحة T التي متجهتها $\vec{u}$

$t_{\vec u}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec u$

$\Leftrightarrow z_{M'}-z_M=z_{\vec u}$

$\Leftrightarrow z_{M'}=z_M+z_{\vec u}$

$z_{M'}=z_M+z_{\vec u}$ تسمى الكتابة العقدية للإزاحة

مثال: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec i,\vec j)$ نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي: $z_A=3+5i$; $z_B=3-5i$; $z_C=7+3i$ وليكن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec u$ التي لحقها $4-2i$

1. بين أن : $z'=z+4-2i$ وتسمى الكتابة العقدية للإزاحة
2. تحقق أن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T
3. حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة T

الجواب: 1) $T(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec u$

$\Leftrightarrow z_{M'}-z_M=z_{\vec u} \Leftrightarrow z_{M'}=z_M+z_{\vec u}$

$\Leftrightarrow z'=z+z_{\vec u} \Leftrightarrow z'=z+4-2i$

2)نعوض z بـ $z_A=3+5i$ فنجد : $z'=3+5i+4-2i$

$\Leftrightarrow z'=7+3i=z_C$ ومنه C هي صورة النقطة A بالإزاحة T

3) نعوض z بـ $z_B=3-5i$ فنجد : $z'=3-5i+4-2i$

$\Leftrightarrow z'=7-7i=z_{B'}$ ومنه لحق النقطة B' هو $z_{B'}=7-7i$

-2 الكتابة العقدية للتحاكي h الذي مركزه Ω : ونسبته k

$h_{(\Omega;k)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z_{M'}-z_\Omega=k(z_M-z_\Omega)$

$\Leftrightarrow z_{M'}=kz_M+z_\Omega(1-k)$

$z_{M'}=kz_M+z_\Omega(1-k)$ **تسمى الكتابة العقدية للتحاكي**

مثال: نعتبر التحاكي h الذي مركزه $\Omega(3;-2)$ ونسبته $k=4$
وليكن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالتحاكي h ونعتبر النقطة A التي لحقها $z_A=3+5i$

1. بين أن : $z'=4z-9+6i$ وتسمى الكتابة العقدية للتحاكي
2. حدد لحق النقطة A' صورة النقطة A بالتحاكي h

الجواب : 1) $h_{(\Omega;k)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z_{M'}-z_\Omega=k(z_M-z_\Omega)$

$\Leftrightarrow z_{M'}=kz_M+z_\Omega(1-k)$

$z_{M'}=kz_M+z_\Omega(1-k) \Leftrightarrow z'=4z+z_\Omega(1-4)$

$\Leftrightarrow z'=4z-3(3-2i) \Leftrightarrow z'=4z-9+6i$

-3 الكتابة العقدية للدوران r الذي مركزه Ω وزاويته α

$r(z_M)=z_{M'} \Leftrightarrow z_{M'}=e^{i\alpha}(z_M-z_\Omega)+z_\Omega$

وتسمى الكتابة العقدية للدوران r الذي مركزه Ω وزاويته α

مثال: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O;\vec i,\vec j)$ نعتبر النقطتين A و B التي لحقهما على التوالي هي: $z_A=7+2i$; $z_B=4+8i$ وليكن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران r الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$

1. بين أن : $z'=iz+4i+12$ وتسمى الكتابة العقدية للدوران r
2. بين أن لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران r هو $z_C=10+11i$

الجواب : 1) $r(M)=M' \Leftrightarrow z_{M'}=e^{i\alpha}(z_M-z_B)+z_B$

$\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-4-8i)+4+8i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z'=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z-4-8i)+z \Leftrightarrow z'=i(z-4-8i)+4+8i$

$\Leftrightarrow z'=iz-4i+8+4+8i \Leftrightarrow z'=iz+4i+12$

2) نعوض z بـ $z_A=7+2i$ فنجد : $z'=i(7+2i)+4i+12$

$z'=7i-2+4i+12=11i+10$

ومنه لحق النقطة C هو $z_C=11i+10$