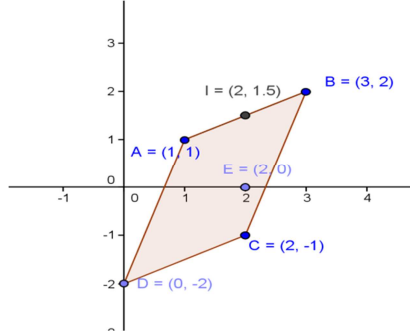


الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: الأعداد العقدية " الجزء الأول"
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية
الجهة
الشرقية



I(2) منتصف القطعة [AB] يعني $\overline{AI} = \overline{IB}$

يعني $z_{\overline{AI}} = z_{\overline{IB}}$ يعني $z_I - z_A = z_B - z_I$ يعني $z_I = \frac{z_B + z_A}{2}$

ومنه $z_I = \frac{3+2i+1+i}{2} = 2 + \frac{3}{2}i$ ومنه $I\left(2; \frac{3}{2}\right)$

ملاحظة: يمكننا استعمال القاعدة التالية مباشرة: $z_I = \frac{z_B + z_A}{2}$

$z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = 3 + 2i - (1 + i) = 3 + 2i - 1 - i = 2 + i$

4) يكفي أن نبين أن $\overline{AB} = \overline{DC}$

لدينا: $z_{\overline{AB}} = 2 + i$ نحسب $z_{\overline{DC}} = ?$

$z_{\overline{DC}} = z_C - z_D = 2 - i - (-2i) = 2 + i$

ومنه $z_{\overline{AB}} = z_{\overline{DC}}$ ومنه $\overline{AB} = \overline{DC}$ وبالتالي متوازي الأضلاع ABCD

تمرين 4: نعتبر النقط: $A(1+i)$ و $B\left(\frac{1}{2}+2i\right)$ و $C(-1-i)$

هل النقط A و B و C مستقيمة؟

الجواب: $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\frac{1}{2}+2i-i}{-1-i-i} = \frac{\frac{1}{2}+i}{-1-2i} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

انن: النقط A و B و C مستقيمة

تمرين 5: $z_1 = 5 - 2i$ و $z_2 = 3 + 2i$ و $z_3 = -5 - 3i$ و $z_4 = 2i$

$z_5 = -7$ و $z_6 = -5 - 3i + i(2 - i)$

الأجوبة: $z_1 = 5 - 2i$ انن: $\overline{z_1} = 5 - 2i$

$z_2 = 3 + 2i$ انن: $\overline{z_2} = 3 - 2i$

$z_3 = -5 - 3i$ انن: $\overline{z_3} = -5 + 3i$

$z_4 = 2i$ انن: $\overline{z_4} = 2i$

$z_5 = -7$ انن: $\overline{z_5} = -7 + 0 \times i = -7$

$z_6 = -5 - 3i + i(2 - i)$

يعني $z_6 = -5 - 3i + 2i - i^2 = -5 - 3i + 2i + 1 = -4 - i$

انن: $\overline{z_6} = -4 - i = -4 + i$

تمرين 1: أكتب الأعداد العقدية التالية على شكلهم الجبري أو الديكارتي:

$z_2 = (1 + i\sqrt{3})^3$ و $z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2$

$z_5 = (1+i)^{10}$ و $z_4 = \frac{1+i}{3-i}$ و $z_3 = \frac{1-3i}{3-i}$

أجوبة (1):

$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2 = -2+2i-i-1+1+4i-4$

$\text{Im}(z_1) = 5$ و $\text{Re}(z_1) = -6$: ومنه $z_1 = -6+5i = a+bi$

$z_2 = (1+i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (\sqrt{3}i) + 3 \times 1 \times (\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3$ (2)

$z_2 = 1 + 3\sqrt{3}i - 3 \times 3 - 3\sqrt{3}i = -8 + 0i \in \mathbb{R}$

لأن $\text{Im}(z_2) = 0$

$z_3 = \frac{1-3i}{3-i} = \frac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i-9i+3}{9-i^2} = \frac{6-8i}{10}$ (3)

$\text{Im}(z_3) = -\frac{4}{5}$ و $\text{Re}(z_3) = \frac{3}{5}$: ومنه $z_3 = \frac{6}{10} - \frac{8i}{10} = \frac{3}{5} - \frac{4i}{5}$

$z_4 = \frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+3i-2}{9-4i^2} = \frac{1+5i}{13} = \frac{1}{13} + i\frac{5}{13}$ (4)

$z_5 = (1+i)^{10} = ((1+i)^2)^5 = (2i)^5 = (2)^5 \times (i)^5 = 32 \times (i)^4 \times i = 32i$ (5)

تمرين 2: نعتبر في المستوى العقدي النقط: $A(-2; 1)$ و

$B(-3; -1)$ و $C\left(\frac{1}{2}; -2\right)$

ما أحاق النقط A و B و C؟

الأجوبة: لحق النقط A هو العدد العقدي $z_A = -2+i$ أي

$z_A = -2+i$

لحق النقط B هو العدد العقدي $z_B = -3+i \cdot (-1) = -3-i$ أي

$z_B = -3-i$

لحق النقط C هو العدد العقدي $z_C = \frac{1}{2} - 2i$

تمرين 3: نعتبر في المستوى العقدي النقط A, B, C, D و E

أحاقهم على التوالي: $z_A = 1+i$ و $z_B = 3+2i$

$z_C = 2-i$ و $z_D = -2i$ و $z_E = 2$

1. مثل النقط A, B, C, D و E في المستوى العقدي

2. حدد z_I لحق النقط I منتصف القطعة [AB]

3. حدد $z_{\overline{AB}}$ لحق المتجهة \overline{AB}

4. بين أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع

الأجوبة: (1)

تمرين 6: ليكن z عددا عقديا.

حدد وأكتب بدلالة \bar{z} مرافقات الأعداد العقدية التالية:

$$Z_1 = (2+i)(5-i) \quad Z_2 = 2z+5i \quad Z_3 = \frac{z-1}{-3z+i}$$

أجوبة (1): $\bar{Z}_1 = \overline{(2+i)(5-i)} = \overline{(2+i)} \times \overline{(5-i)} = (2-i)(5+i)$

$$\bar{Z}_2 = \overline{2z+5i} = \overline{2z} + \overline{5i} = 2\bar{z} - 5i$$

$$\bar{Z}_3 = \overline{\left(\frac{z-1}{-3z+i}\right)} = \frac{\overline{z-1}}{\overline{-3z+i}} = \frac{\bar{z}-1}{-3\bar{z}-i}$$

تمرين 7: حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلتين:

$$2z + i\bar{z} = 5 - 4i \quad .1$$

$$z = 2\bar{z} - 2 + 6i \quad .2$$

أجوبة (1): $z \in \mathbb{C}$ يعني $\exists x \in \mathbb{R}$ و $\exists y \in \mathbb{R}$ بحيث $z = x + yi$

$$2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 4i \Leftrightarrow 2z + i\bar{z} = 5 - 4i$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y + x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow (2x + y) + i(2y + x) = 5 - 4i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{13}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x + 2x + y = 8 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

وبتعويض y بقيمتها في المعادلة 1 نجد: $x = \frac{14}{3}$

$$\text{ومنه: } S = \left\{ \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i \right\}$$

(2) بنفس الطريقة نستعمل الكتابة الجبرية: $z = x + yi$ فنجد:

$$x + yi = 2(x - yi) - 2 + 6i \Leftrightarrow z = 2\bar{z} - 2 + 6i$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -2 \\ 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow -x + 3iy = -2 + 6i \Leftrightarrow$$

$$\text{ومنه: } S = \{2 + 2i\}$$

تمرين 8: نعتبر في المستوى العقدي العدد العقدي U

ولتكن M صورة العدد العقدي z ونضع:

$$U = (z - 2i)(\bar{z} - 1)$$

نضع: $z = x + yi$ حيث $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$

(1) حدد بدلالة x و y الجزء الحقيقي والتخيلي للعدد العقدي U

(2) حدد مجموعة النقط M ذات اللق z بحيث يكون:

(أ) U عددا حقيقيا

(ب) U عددا تخيلي صرف

أجوبة (1): $z = x + yi$ إذن: $U = (x + yi - 2i)(x - yi - 1)$

يعني $U = (x + i(y - 2))((x - 1) - yi)$ وبعد النشر نجد:

$$U = (x^2 + y^2 - x - 2y) + i(-y - 2x + 2)$$

ومنه: $\text{Re}(U) = x^2 + y^2 - x - 2y$ و $\text{Im}(U) = -y - 2x + 2$

(2) (أ) U عدد حقيقي يعني $\text{Im}(U) = 0$ يعني $-y - 2x + 2 = 0$ (Δ)

إذن مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) الذي معادلته $-y - 2x + 2 = 0$

(ب) U عدد تخيلي صرف يعني $\text{Re}(U) = 0$ يعني $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$

$$x^2 - 2x + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2y + 1 + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 2y = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

إذن مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركزها

$$R = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ وشعاعها } \Omega\left(\frac{1}{2}; 1\right):$$

تمرين 9: حدد معيار الأعداد التالية: $z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و

$$z_2 = -\sqrt{2} - i$$

$$z_3 = 3 - 4i \quad z_4 = -2i \quad z_5 = -4$$

أجوبة: $|z_1| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$$|z_2| = |-\sqrt{2} - i| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$|z_3| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5; |z_4| = |-2i| = \sqrt{(-2)^2} = 2$$

$$|z_4| = |-2i| = |0 - 2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_5| = |-4| = |-2 + 0i| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$$

تمرين 10: نعتبر في المستوى العقدي النقط C, B, A

أحاطهم على التوالي: $z_A = 2$ و $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ و $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

الجواب: يكفي أن نبين أن $AC = AB = BC$:

$$AB = |z_B - z_A| = |1 + \sqrt{3}i - 2| = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3 + \sqrt{3}i - 2| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BC = |z_C - z_B| = |3 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i| = |2| = 2$$

ومنه: $AC = AB = BC$ وبالتالي: المثلث ABC متساوي الأضلاع.

تمرين 11: حدد معيار كل من الأعداد العقدية التالية:

$$z_1 = 5(1 + i\sqrt{3}) \quad z_2 = (1 + i)(\sqrt{3} - i) \quad z_3 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^3$$

الجواب: $|z_1| = |-5(1 + i\sqrt{3})| = |-5| |1 + i\sqrt{3}| = 5\sqrt{1+3} = 10$

$$|z_2| = |(1 + i)(\sqrt{3} - i)| = |1 + i| \times |\sqrt{3} - i| = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$|z_3| = \left|\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^3\right| = \left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right|^3 = \left(\left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right|\right)^3 = \left(\frac{|1 + i\sqrt{3}|}{|1 - i|}\right)^3$$

$$|z_3| = \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}\right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

تمرين 12: تحديد (Δ) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث:

$$|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i|$$

الجواب: طريقة 1: (طريقة تحليلية)

$z \in \mathbb{C}$ يعني $\exists x \in \mathbb{R}$ و $\exists y \in \mathbb{R}$ بحيث: $z = x + yi$

$$|x + yi - 1 - 2i| = |x + yi - 7 + 2i| \text{ يعني } |z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i|$$

$$\text{يعني } |x - 1 + i(y - 2)| = |x - 7 + i(y + 2)|$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2} \text{ يعني}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2 \text{ يعني}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4 \text{ يعني}$$

$$12x - 8y - 48 = 0 \text{ يعني}$$

• $k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0$ أو $\arg z = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

• إذا كان $y > 0$ فان: $\arg(iy) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

• إذا كان $y < 0$ فان: $\arg(iy) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

• $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi]$

• $\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$

تمرين 15: حدد عمدة العدد العقدي z في كل حالة من

الحالات التالية: $z_1 = 5i$ و $z_2 = -1$

$z_3 = -3i$ و $z_4 = 2$

أجوبة: $\arg z_1 = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ و $\arg z_2 = \pi [2\pi]$

$\arg z_3 = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ و $\arg z_4 = 0 [2\pi]$

تمرين 16: حدد شكلا مثلثيا للأعداد العقدية التالية

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = 1 - i$ و $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$ و $z_4 = -1 - \sqrt{3}i$

أجوبة (1): لدينا: $|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

(2) لدينا: $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

ونستعمل القاعدة التالية: $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$

اذن: $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$

(3) لدينا: $|z_3| = \sqrt{\frac{3}{36} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

ونستعمل القاعدة التالية: $\cos(\pi - x) = -\cos x$ و $\sin(\pi - x) = \sin x$

اذن: $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$

(4) لدينا: $|z_4| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$z_4 = -1 - \sqrt{3}i = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

ونستعمل القاعدة التالية: $\cos(\pi + x) = -\cos x$ و $\sin(\pi + x) = -\sin x$

اذن: $z_4 = 2 \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right)$

تمرين 17: حدد شكلا مثلثيا لكل من الأعداد العقدية التالية:

$z_1 = \sqrt{3} + 3i$ و $z_2 = -2 + 2i$

$z_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_4 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

أجوبة (1): لدينا: $|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$z_1 = \sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + i \frac{3}{2\sqrt{3}} \right)$

يعني $(\Delta): 3x - 2y - 12 = 0$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) الذي معادلته $3x - 2y - 12 = 0$

طريقة 2: (طريقة هندسية)

$|z - (1 + 2i)| = |z - (7 - 2i)|$ يعني $|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i|$

نضع: $A(z_A = 1 + 2i)$ و $B(z_B = 7 - 2i)$

اذن: $AM = BM$ يعني $|z_M - z_A| = |z_M - z_B|$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) واسط القطعة $[AB]$

تمرين 13: تحديد (Δ) مجموعة النقط M التي لحقتها z بحيث:

$|z - 2i| = 3$

الجواب: 1: (طريقة تحليلية)

$z \in \mathbb{C}$ يعني $\exists y \in \mathbb{R}$ و $\exists x \in \mathbb{R}$ بحيث: $z = x + yi$

$|z - 2i| = 3$ يعني $|x + yi - 2i| = 3$ يعني $|x + i(y - 2)| = 3$

يعني $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 3$ يعني $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

اذن مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركزها $\Omega(0, 2)$ وشعاعها

$R = 3$

طريقة 2: (طريقة هندسية)

$|z - 2i| = 3$ نضع: $A(z_A = 2i)$

اذن: $AM = 3$ يعني $|z_M - z_A| = 3$

اذن مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركزها A وشعاعها $R = 3$

تمرين 14: نعتبر النقط A و B و C و D و E و F التي ألقاها

على التوالي:

$z_A = 2$ و $z_B = -2i$ و $z_C = 2 + 2i$ و $z_D = 3i$

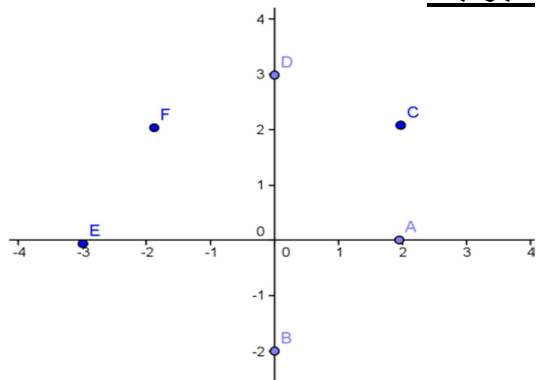
$z_E = -2 + 2i$ و $z_F = -3$

أنشئ النقط A و B و C و D و E و F

باستعمال التمثيل في المستوى العقدي حدد عمدة كل عدد من

الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C و z_D و z_E و z_F

الجواب:



$\arg z_B = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ و $\arg z_A = 0 [2\pi]$

$\arg z_D = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ و $\arg z_C = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

$\arg z_F = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$ و $\arg z_E = \pi [2\pi]$

ملاحظات مهمة:

• $z \in \mathbb{R}^{**} \Leftrightarrow \arg z \equiv 0 [2\pi]$

• $z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi [2\pi]$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\sin(-x) = -\sin x$ و $\cos(-x) = \cos x$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

$$Z = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-i+1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

تمرين 19: تعتبر النقط A و B و C التي ألقاها على التوالي هي:

$$z_C = 7+3i \quad \text{و} \quad z_B = 3-5i \quad \text{و} \quad z_A = 3+5i$$

$$(1) \text{ بين أن: } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$$

(2) استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية و أن $BC = 2AC$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-4-8i}{-4+2i} = \frac{2i(-4+2i)}{-4+2i} = 2i \quad (\text{الجواب : 1})$$

$$(2) \quad \overline{(CA; CB)} \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) [2\pi]$$

$$\overline{(CA; CB)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ يعني } \overline{(CA; CB)} \equiv \arg(2i) [2\pi]$$

اذن المثلث ABC قائم الزاوية في C

$$\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = |2i| \quad \text{اذن} \quad \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$$

$$\text{اذن: } \frac{BC}{AC} = 2 \quad \text{اذن} \quad \frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = 2$$

خصائص مهمة :

$$(1) \quad z' = z + z_{\vec{u}} \quad \text{ذات المتجهة } \vec{u} \text{ التي لحقها } z_{\vec{u}}$$

$$(2) \quad z_{M'} = kz_M + z_{\Omega} (1-k) \quad \text{هي الكتابة العقدي للتحاكي } h \text{ الذي مركزه } \Omega \text{ ونسبته } k$$

$$(3) \quad z_{M'} = e^{i\alpha} (z_M - z_{\Omega}) + z_{\Omega} \quad \text{هي الكتابة العقدي للدوران } \mathcal{R} \text{ الذي مركزه } \Omega \text{ وزاويته } \alpha$$

تمرين 20: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم

نعتبر النقط A و B و C التي ألقاها على التوالي هي

$$z_C = 7+3i \quad ; \quad z_B = 3-5i \quad ; \quad z_A = 3+5i$$

ولیکن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالإزاحة T ذات المتجهة \vec{u} التي لحقها $4-2i$

1. بين أن : $z' = z + 4 - 2i$ وتسمى الكتابة العقدي للإزاحة

2. تحقق أن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T

3. حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة T

$$(\text{الجواب : 1}) \quad z' = z + z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' = z + 4 - 2i$$

$$(2) \text{ نعوض } z_B = 3+5i \text{ فنجد : } z'_B = 3+5i+4-2i$$

$$z_1 = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = -2 + 2i \quad (2)$$

$$|z_2| = |-2 + 2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{لدينا:}$$

$$z_2 = -2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(-\frac{2}{2\sqrt{2}} + i \frac{2}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\sin(\pi-x) = \sin x$ و $\cos(\pi-x) = -\cos x$

اذن :

$$z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

$$z_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$z_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\sin(\pi+x) = -\sin x$ و $\cos(\pi+x) = -\cos x$

$$\text{اذن : } z_3 = 1 \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right) = 1 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right)$$

$$z_4 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} \quad (4)$$

$$|z_4| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{لدينا:}$$

$$z_4 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} - i \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} - i \frac{1}{2} \right)$$

$$z_4 = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\sin(-x) = -\sin x$ و $\cos(-x) = \cos x$

$$\text{اذن : } z_4 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

تمرين 18:

$$Z = \frac{z_1}{z_2} \quad \text{و} \quad z_2 = 1-i \quad \text{و} \quad z_1 = \sqrt{3}-i$$

1. أعط شكلا مثلثيا لكل من z_1 و z_2 و Z .

2. أكتب Z على الشكل الجبري ثم استنتج $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.

$$(\text{الأجوبة : 1}) \quad z_1 = \sqrt{3}-i$$

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{لدينا:}$$

$$\sqrt{3}-i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\sin(-x) = -\sin x$ و $\cos(-x) = \cos x$

$$\text{اذن : } z_1 = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \text{لدينا:}$$

$$z_2 = 1-i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$A \Leftrightarrow z_C = 7 + 3i = z' \text{ ومنه } C \text{ هي صورة النقطة } A$$

بالإزاحة T

$$(3) \text{ نعوض } z \text{ بـ } z_B = 3 - 5i \text{ فنجد : } z' = 3 - 5i + 4 - 2i$$

$$\Leftrightarrow z_{B'} = 7 - 7i \text{ ومنه لحق النقطة } B' \text{ هو } z_B = 7 - 7i$$

تمرين 21: نعتبر التحاكي h الذي مركزه $\Omega(3; -2)$

ونسبته $k = 4$

وليكن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M

بالتحاكي h ونعتبر النقطة A التي لحقها $z_A = 3 + 5i$

1. بين أن : $z' = 4z - 9 + 6i$ وتسمى الكتابة العقديّة للتحاكي

2. حدد لحق النقطة A' صورة النقطة A بالتحاكي h

$$\text{الجواب : (1)} \Leftrightarrow z_{M'} = kz_M + z_{\Omega}(1 - k)$$

$$z' = 4z + z_{\Omega}(1 - 4)$$

$$\Leftrightarrow z' = 4z - 9 + 6i \Leftrightarrow z' = 4z - 3(3 - 2i)$$

(2) نعوض z بـ $z_A = 3 + 5i$ في : $z' = 4z - 9 + 6i$

فنجد $z' = 4(3 + 5i) - 9 + 6i$ ومنه لحق النقطة A' هو

$$z_{A'} = 3 + 26i$$

تمرين 22: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم

ومباشر $(O; \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر النقطتين A و B التي لحقهما على التوالي

$$\text{هي : } z_A = 7 + 2i ; z_B = 4 + 8i$$

وليكن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M'

صورة النقطة M بالدوران r الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$

1. بين أن : $z' = iz + 4i + 12$ وتسمى الكتابة العقديّة للدوران

2. بين أن لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران r هو

$$z_C = 10 + 11i$$

$$\text{الجواب : (1)} \Leftrightarrow r(M) = M'(1) \Leftrightarrow z_{M'} = e^{i\alpha}(z_M - z_B) + z_B$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 4 - 8i) + 4 + 8i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)(z - 4 - 8i) + z$$

$$z' = i(z - 4 - 8i) + 4 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 4i + 12 \Leftrightarrow z' = iz - 4i + 8 + 4 + 8i \Leftrightarrow$$

(2) نعوض z بـ $z_A = 7 + 2i$ فنجد :

$$z' = i(7 + 2i) + 4i + 12$$

$$z' = 7i - 2 + 4i + 12 = 11i + 10$$

ومنه لحق النقطة C هو $z_C = 11i + 10$