الاشتقاق

ذ. محمد الكيال

قابلية الاشتقاق في عدد:

نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق في العدد x_0 إذا كانت النهاية : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ويرمز له بالرمز : $f'(x_0)$

معادل المماس لمنحنى دالة - الدالة التألفية المماسة لمنحنى دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0

- معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $u(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تسمى الدالة التآلفية المماسة لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 و هي تقريب للدالة f بجوار x_0

قابلية الاشتقاق على اليمين - قابلية الاشتقاق على اليمين :

- نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت النهاية $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في x_0 و يرمز له بالرمز : $f'_d(x_0)$

- نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت النهاية : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في x_0 و يرمز له بالرمز : $f'_g(x_0)$

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في x_0 و $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

الاشتقاق و الاتصال:

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في عدد x_0 فإن f تكون متصلة في x_0

جدول مشتقات بعض الدوال الاعتيادية:

	$f(x)$	$f'(x)$
$(k \in \mathbb{R})$	k	0
	x	1
	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	x^r	rx^{r-1}
	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

العمليات على الدوال المشتقة- مشتقة مركب دالتين – مشتقة دالة الجذر:

$(k \in \mathbb{R}) \quad (ku)' = k(u)'$	$(u-v)' = u' - v'$	$(u+v)' = u' + v'$
$(u^n)' = nu'.u^{n-1}$		$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$		$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$		$(u \circ v)' = [u' \circ v] \times v'$

الاشتقاق و تغيرات دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow$ f تزايدية على المجال I
- $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow$ f تناقصية على المجال I
- $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow$ f ثابتة على المجال I

الاشتقاق و التأويل الهندسي:

النهاية	استنتاج	التأويل الهندسي للمنحنى (C_f) يقبل :
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$	f قابلة للاشتقاق في x_0	مماسا في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		مماسا أفقيا في النقطة $A(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$	f قابلة للاشتقاق على يمين x_0	نصف مماس على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$	f قابلة للاشتقاق على يسار x_0	نصف مماس على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل