2 الاشتقاق DERIVATION

من إنجاز : الأستاذ عادل بناجي

تقديم

حاول العلماء منذ العصور القديمة تحديد مماسات لبعض المنحنيات . وقد قدم أرخميدس (Archimède) ($-278;-212$) مقترحا في هذا الصدد.

وأسفرت أعمال جملة من الرياضيين و الفيزيائيين ،فيمابعد،خاصة نيوتن (Newton) ($1642-1727$م) وليبنيتز (Leibniz) ($1646-1716$م) في تحديد عام لمماسات منحنيات دوال ، وتحديد سرعة جسم متحرك . كما نتج عن تقدم الحساب التفاضلي تطور لمفهوم الإشتقاق .

ويرجع الفضل للعالم الرياضي والفلكي الفرنسي افطالي الأصل لاغرانج Louis, Joseph Lagrange de compte ($1736-1813$ م) في إدخال كلمة " المشتقة " وفي وضع الترميز $f'(x)$ الذي عرف كنهاية لمعدل التغير.

نبذة عن عالم

غوتفريد فيلهيلم من لايبنتز (أيضاً لايبنتز) الحديث لمبدأ انحفاظ الطاقة.

$1646-1716$ فيلسوف ألماني، عالم طبيعة، عالم رياضيات، دبلوماسي، مكتبي، ومحامي.

يرتبط اسم لايبنتز بالتعبير " دالة رياضية " (1694)، التي كان يصف بها كل كمية مُتَعَلِّقة ب منحنى، مثل ميل المنحنى أونقطة معينة على المنحنى.

يعتبر لايبنتز مع نيوتن أحد مؤسسي علم التفاضل و التكامل و بخاصة تطوير مفهوم التكامل و قاعدة الجداء ، كما طور المفهوم

بطاقة تقنية رقم : 02

ثانوية : الفتح التأهيلية السنة الدراسية : 2015 – 2016 الأستاذ : عادل بناجي	المستوى : الثانية باكلوريا علوم تجريبية درس : الاشتقاق التذبير الزمني : 5 ساعات

فقرات الدرس	• تذكير وإضافات • العمليات على الدوال المشتقة • الاشتقاق والاتصال • مشتقة مركب دالتين • مشتقة الدالة العكسية
المكتسبات القبلية	• النهايات و الاتصال • مفاهيم أساسية حول مفهوم الاشتقاق • تطبيقات الاشتقاق (رتابة دالة عددية - مطارف دالة عددية - المعادلة التفاضلية $y'+\omega^2 y=0$) • دراسة الدوال العددية
الكفاءات المستهدفة	• حساب مشتقات الدوال الاعتيادية ؛ • تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة مشتقتها ؛ • تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني ؛ • تحديد العدد المشتق في نقطة للدالة العكسية لدالة ؛ • تحديد رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال
التوجيهات التربوية	• يتم التذكير بمفهوم الاشتقاق و تطبيقاته من خلال أنشطة متنوعة تبرز الهمية التي يكتسيها في الدراسة الموضعية و الشاملة للدوال المقررة و خاصة في التقريب المحلي لدالة وفي دراسة منحى تغيرات دالة على مجال و تحديد المطاريف ودراسة إشارة دالة أو متفاوتة جبرية على مجال ... • تتم صيانة مكتسبات التلاميذ حول الاشتقاق و النهايات من خلال دراسة أمثلة لدوال حدودية و دوال جذرية و دوال لاجذرية و دوال مثلثية
الوسائل الديداكتيكية	سلسلة أنشطة - سلسلة تمارين - الكتاب المدرسي - ملخص المكتسبات السابقة ؛

1 أنشطة الدرس

نشاط 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي : $f(x)=x^2-4$

1 أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-1)-f(-1)}{h}$ ثم استنتج أن f قابلة للاشتقاق في 2 و -1

2 حدد $f'(2)$ و $f'(-1)$

3 اعط معادلة مماس منحنى الدالة f في النقطة 2

نشاط 2

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x)=2x+1 & ;x\geqslant 1 \\ f(x)=3x^2 & ;x<1 \end{cases}$

1 أدرس قابلية اشتقاق f على اليسار وعلى اليمين في 1 ؛ ثم اول النتيجتين المحصل عليهما مبيانيا

2 هل الدالة f قابلة للاشتقاق في 1 ؟

3 حدد تعبير معادلتي المماسين (T_d) و (T_g) حيث $(T_d): y=f'_d(1)(x-1)+f(1)$ و $(T_d): y=f'_g(1)(x-1)+f(1)$

4 أنشئ $(\mathscr{C}_f)$ و (T_d) و (T_g) و النقطة $M(1,f(1))$ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

نشاط 3

في كل حالة من الحالات التالية ادرس قابلية الدالة f على المجال I ، ثم حدد دالتها المشتقة f'

1 $f(x)=x+\sqrt{x}$ ؛ $I=]0,+\infty[$

2 $f(x)=(x+2)(x-1)$ ؛ $I=\mathbb{R}$

3 $f(x)=\dfrac{1}{x^3-8}$ ؛ $I=]2,+\infty[$

4 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

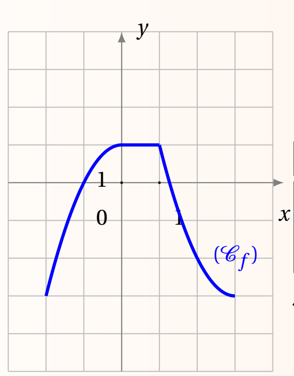
نشاط 4

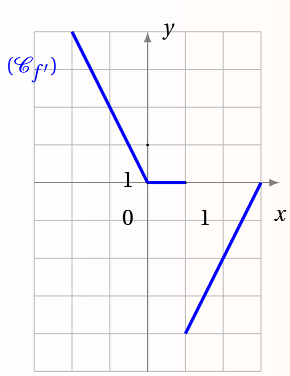
يمثل الشكلان $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_{f'})$ جانبه على التوالي منحني دالة f و دالتها المشتقة f'

1 أتمم ملء الجدول التالي :

المجال	إشارة الدالة المشتقة f'	تغيرات الدالة f
$I=]-2,0[$		
$J=]0,1[$		
$K=]1,3($		

2 ذكر بالخاصية التي تربط اشارة الدالة f' بتغيرات الدالة f

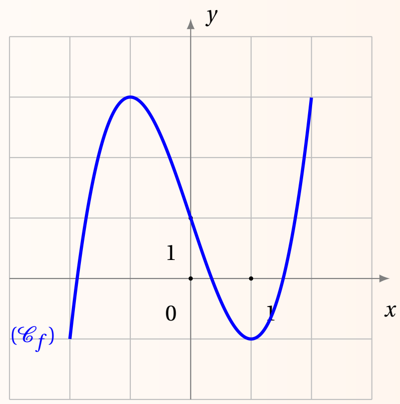




ذ. عادل بناجي

نشاط 5

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها المبياني أسفله .



1 ماذا تمثل النقطتان $A(1,f(1))$ و $B(-1,f(-1))$ بالنسبة للدالة f ؟

2 حدد $f(1)$ و $f(-1)$ و $f'(1)$ و $f'(-1)$

3 حدد معادلتي مماسي منحنى الدالة f وانشأهما في نفش الشكل . ماذا تلاحظ ؟

نشاط 6

نعتبر الدوال f و g وh المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بمايلي : $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ و $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$ و$h(x)=\sqrt{x}$

1 تحقق أن : $f=g\circ h$

2 أحسب مشتقات الدوال f و g وh

3 قارن $f'(x)$ و $g'[h(x)].h'(x)$ بالنسبة ل $x\in]0,+\infty[$

نشاط 7

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $f(x)=x^2-1$

1 بين أن f تقابل من $[0,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

2 تحقق أن : $(\forall x\in J)\ : f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$

3 بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ وأحسب $\left(f^{-1}\right)'(x)$

4 تحقق أن : $(\forall x\in]-1,+\infty[)$ $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$:

2 تذكير و إضافات

1.2 اشتقاق دالة في نقطة

تعاريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$

- نقول إن f قابلة للإشتقاق في a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ أو $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$.
العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a ونرمز له ب $f'(a)$ ونكتب : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ أو $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
$f'(a)$
- إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق في a فإن الدالة : $x \mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة a (أو التقريب التآلفي للدالة f بجوار a)
- معادلة المماس للدالة f في النقطة a هي: $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

تمرين تطبيقي

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في x_0 في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x) = 3x^2 + x$ ؛ $x_0 = 1$
2. $f(x) = x^3 + 2x$ ؛ $x_0 = -1$
3. $f(x) = x + |x+1|$ ؛ $x_0 = 1$

تمرين تطبيقي

باستعمال مفهوم العدد المشتق أحسب النهايتين التاليتين :

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{cos(x) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(1+x-x^2)^{2015} - 1}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^3 - a^3}$ $(a > 0)$

تمرين تطبيقي

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب : $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$

1. بين أن f قابلة للاشتقاق في النقطة 0
2. حدد التقريب التالفي للدالة f بجوار 0
3. اعط قيمة مقربة للعددين $\sqrt[3]{0.997}$ و $\sqrt[3]{1.0035}$

2.2 الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

تعريف

...

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a,a+\alpha[$ $(\alpha>0)$. نقول إن f قابلة للإشتقاق على اليمين في a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$.

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في a ونرمز له ب $f'_d(a)$ ونكتب : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)$ أو $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)$

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]a-\alpha,a]$ $(\alpha>0)$. نقول إن f قابلة للإشتقاق على اليسار في a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$.

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في a ونرمز له ب $f'_g(a)$ ونكتب : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)$ أو $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)$

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a\in I$.
نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وفقط إذا كانت قابلة للإشتقاق على اليمين و على اليسار في a و $f'_g(a)=f'_d(a)$

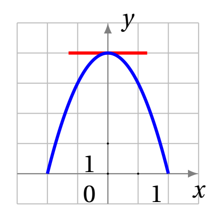
تمرين تطبيقي

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f (على اليمين أو السار) في x_0 في كل حالة من الحالات التالية :

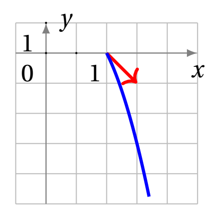
1. $f(x)=x\sqrt{x}$ ؛ على اليمين في $x_0=0$
2. $f(x)=x+\sqrt{x-2}$ ؛ على اليمين في $x_0=2$
3. $f(x)=|x^2-x|$ ؛ على اليسار في $x_0=1$

3.2 قابلية الاشتقاق و التأويل الهندسي

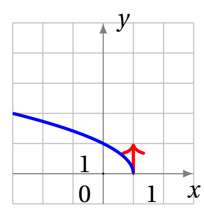
النهاية	استنتاج	التأويل الهندسي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$: يقبل ...
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \neq 0$	f قابلة للاشتقاق في x_0	1 مماسا في النقطة $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$		2 مماسا أفقيا في النقطة $A\big(x_0, f(x_0)\big)$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \neq 0$	f قابلة للاشتقاق على يمين x_0	3 نصف مماس على اليمين في النقطة $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$		4 نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $A\big(x_0, f(x_0)\big)$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	5 نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ موجه نحو الأسفل
$\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$		6 نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ موجه نحو الأعلى
$\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \neq 0$	f قابلة للاشتقاق على يسار x_0	7 نصف مماس على اليسار في النقطة $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$		8 نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $A\big(x_0, f(x_0)\big)$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	9 نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ موجه نحو الأعلى
$\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$		10 نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ موجه نحو الأسفل



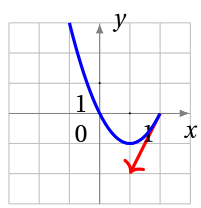
الشكل 1



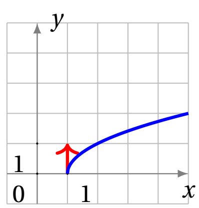
الشكل 3



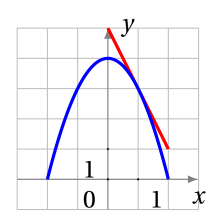
الشكل 5



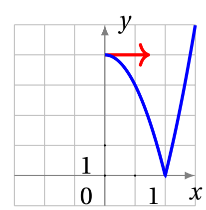
الشكل 7



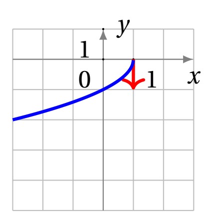
الشكل 9



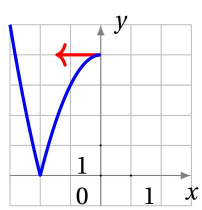
الشكل 2



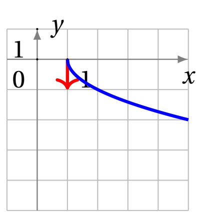
الشكل 4



الشكل 6



الشكل 8



الشكل 10

ذ. عادل بناجي

4.2 الاشتقاق على مجال - الدالة المشتقة

تعاريف

...

- نقول إن f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I
- نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المغلق $[a,b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال المفتوح $]a,b[$ وقابلة للاشتقاق على اليمين في a وقابلة للاشتقاق على اليسار في b .
- الدالة المعرفة ب $x \mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f ويرمز لها بالرمز f'
- إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بالرمز f'' .

5.2 الدالة المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية - العمليات على الدوال المشتقة

الجدول التالي يلخص مشتقات بعض الدوال الإعتيادية :

الدالة f	f مجموعة تعريف D_f	الدالة المشتقة f'	f' مجموعة تعريف $D_{f'}$
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n;(n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n;(n\in\mathbb{Z}^*-\{1\})$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$D_f=[0,+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'}=]0,+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=sin(x)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=cos(x)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=cos(x)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-sin(x)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=tan(x)$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;(k\in\mathbb{Z})$	$f'(x)=1+tan^2(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;(k\in\mathbb{Z})$
$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$x\in D_g/g(x)\geqslant 0$	$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$x\in D_{g'}/g(x)>0$
$f(x)=sin(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=acos(ax+b)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=cos(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-asin(ax+b)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=tan(ax+b)$	$ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;(k\in\mathbb{Z})$	$f'(x)=a\left(1+tan^2(ax+b)\right)$	$D_{f'}=ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;(k\in\mathbb{Z})$
$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$	$D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\};c\neq 0$	$f'(x)=\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\};c\neq 0$

خاصية

العمليات على الدوال المشتقة

...

- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للا شتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن : الدوال $f+g$ و fg و λf دوال قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $(f+g)' = f' + g'$ و $(fg)' = f'g + fg'$ و $(\lambda f)' = \lambda f'$
- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للا شتقاق على مجال I و g لا تنعدم على I فإن : الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ قابلتان للاشتقاق على I ولدينا : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ و $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

خواص

...

1. كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
2. كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
3. الدالتين $x \mapsto cos(x)$ و $x \mapsto sin(x)$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$
4. الدالة $x \mapsto tan(x)$ قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
5. الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

تمرين تطبيقي

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f ثم حدد دالتها المشتقة في الحالات التالية :

1. $f(x) = (-7x + x^2 + 3)^5$
2. $f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{x} + 3x$
3. $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$
4. $f(x) = x^2 + cos(x)$

6.2 رتابة دالة واشارة مشتقتها

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f' موجبة (قطعا) على I فإن الدالة f تزايدية (قطعا) على I
- إذا كانت f' سالبة (قطعا) على I فإن الدالة f سالبة (قطعا) على I
- إذا كانت f' منعدمة على I فإن الدالة f ثابتة على I

7.2 مطارف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I

- إذا كانت f' قابلة للاشتقاق في x_0 وتقبل مطراف في النقطة x_0 فإن $f'(x_0) = 0$
- إذا كانت f' تنعدم في x_0 و تغير اشارتها فإن $f(x_0)$ مطراف للدالة f

تمرين تطبيقي

أدرس رتابة الدالة f ومطارفها إذا وجدت في الحالات التالية :

1. $f(x) = x^2 + 2x - 1$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$
3. $f(x) = (2x - 3)\sqrt{x}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$
5. $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2 - 1}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$

8.2 الاتصال و الاشتقاق

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$ ؛ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في a فإن f متصلة في a .

ملاحظة

عكس هذه الخاصية غير صحيح

مثال مضاد : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = |x|$

لدينا f متصلة في 0 لكن f غير قابلة للاشتقاق في 0 لأن $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

نتيجة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f متصلة على I

3 مشتقة مركب دالتين

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I)\subset J$

- إذا كان a عنصرا من المجال I بحيث f قابلة للاشتقاق في a و g قابلة للاشتقاق في $f(a)$ فإن الدالة $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في a و لدينا : $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن الدالة $g\circ f$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $(\forall x\in I)\ \ (g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$:

نتيجة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- $(\sqrt{f(x)})'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ $\big($ $f\geqslant 0$ على I $\big)$
- $(f^n(x))'=nf'(x)f^{n-1}(x)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

مثال

لنحسب f' و g' مشتقتي الدالتين : $f(x)=sin(x^2-4x+1$ و $g(x)=tan(\sqrt{x})$

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x)&=(sin(x^2-4x+1))'\\ &=(x^2-4x+1)'\times sin'(x^2-4x+1)\\ &=(2x-4)\times cos(x^2-4x+1)\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=(2x-4)\times cos(x^2-4x+1)}$$

$$\begin{aligned} g'(x)&=(tan(\sqrt{x}))'\\ &=(\sqrt{x})'\times tan'(\sqrt{x})\\ &=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(1+tan^2(\sqrt{x}))\end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(1+tan^2(\sqrt{x}))}$$

4 مشتقة الدالة العكسية

خاصية

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I .

- إذا كان a عنصرا من المجال I بحيث f قابلة للاشتقاق في a و $f'(a) \neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(a)$ ولدينا : $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث دالتها المشتقة لا تنعدم في $f'(I)$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$ ولدينا : $(\forall x \in f(I))\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[1,+\infty[$ ب : $f(x) = x^2 - 2x + 3$

1. بين أن f تقبل دالة عكسية عاى مجال J يجب تحديده نحو $[1,+\infty[$
2. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J
3. أحسب $f(2)$ و استنتج $(f^{-1})'(3)$

نتائج

لتكن f دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق عل مجال I و $n \in \mathbb{N}^*$ و $r \in \mathbb{Q}^*$ حسب الخاصية السابقة نستنتج مايلي :

الدالة	مجال قابلية الاشتقاق	الدالة المشتقة
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$	$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$f(x) = x^r$	f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$	$f'(x) = (x^r)' = r x^{r-1}$
$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$	g قابلة للاشتقاق على I	$g'(x) = \frac{1}{n} \times f'(x) \times \left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}$
$g(x) = \left(f(x)\right)^r$	g قابلة للاشتقاق على I	$g'(x) = \left(\left(f(x)\right)^r\right)' = r \times f'(x) \times \left(f(x)\right)^{r-1}$