.01

01. ندرس اشتقاق الدالة f في $x_0=1$ ثم في $x_0=0$ مع $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} & , x\neq 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$.

- ندرس اشتقاق الدالة f في $x_0=1$.

  - اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=1$.

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}-1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}-(x-1)}{(x-1)^2} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{x\sqrt{(x-1)^2}-(x-1)}{(x-1)^2} \quad ; \left(|x|=x \ ; \ x\to 1^+\right) \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{x|x-1|-(x-1)}{(x-1)^2} \quad ; \left(\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|\right) \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)-(x-1)}{(x-1)^2} \quad ; \left(|x-1|=x-1 \ ; \ x\to 1^+\right) \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}\,\cancel{[x-1]}}{\cancel{(x-1)^2}} \\
&= \lim_{x\to 1^+} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=1\in\mathbb{R}$.

خلاصة (1) : الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=1$ و $f_d'(1)=1$

  - اشتقاق الدالة f على يسار $x_0=1$.

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}-1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}-(x-1)}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x\sqrt{(x-1)^2}-(x-1)}{(x-1)^2} \quad ; \quad (|x| = x \ ; \ x\to 1^-)$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x|x-1|-(x-1)}{(x-1)^2} \quad ; \quad \left(\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-x(x-1)-(x-1)}{(x-1)^2} \quad ; \quad (|x-1| = -(x-1) \ ; \ x\to 1^-)$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(-x-1)}{(x-1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-x-1}{x-1} \quad ; \quad \left(\lim_{x\to 1^-} x-1 = 0^- \ ; \ \lim_{x\to 1^-} -x-1 = -2\right)$$

$$= +\infty$$

ومنه : $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty \notin \mathbb{R}$.

خلاصة (2) : الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار $x_0 = 1$

خلاصة : الدالة f غير قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$

- ندرس اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$.

- اشتقاق الدالة f على يمين $x_0 = 0$.

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}-0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\sqrt{(x-1)^2}}{\cancel{x}(x-1)} \quad ; \quad (|x| = x \ ; \ x\to 0^+)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{|x-1|}{x-1} \quad ; \quad \left(\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-(x-1)}{x-1} \quad ; \quad (|x-1| = -(x-1) \ ; \ x\to 0^+)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -1$$

$$= -1$$

ومنه : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1 \in \mathbb{R}$.

خلاصة (1) : الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$ و $f_d^{'}(0) = -1$

- اشتقاق الدالة f على يسار $x_0 = 0$.

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}-0}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cancel{x}\sqrt{(x-1)^2}}{\cancel{x}(x-1)} \qquad ; \quad \left(|x| = -x \;;\; x\to 0^-\right) \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{-|x-1|}{x-1} \qquad ; \quad \left(\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|\right) \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{-(-(x-1))}{x-1} \qquad ; \quad \left(|x-1| = -(x-1) \;;\; x\to 0^-\right) \\
&= \lim_{x\to 0^-} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \in \mathbb{R}$.

خلاصة (2) : الدالة f قابلة للاشتقاق على يسار $x_0 = 0$ و $f_g^{'}(0) = 1$

خلاصة : الدالة f غير قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$ لأن $f_g^{'}(0) \neq f_d^{'}(0)$

.02

لنعتبر $f : [-1;1]\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ الدالة المعرفة ب: $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

.01 نحدد g التمديد بالاتصال في $x_0 = 0$ للدالة f .

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= 1 \qquad ; \left(\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}=1 \; ; \; \lim_{x\to 0}\sqrt{1-x}=1\right)$$

و منه : $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$

خلاصة : الدالة f تقبل تمديد بالاتصال في النقطة $x_0 = 0$ هي الدالة g المعرفة ب :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \quad ; \quad [-1;1]\setminus\{0\} \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

أو أيضا :

الدالة f تقبل تمديد بالاتصال في النقطة $x_0 = 0$ هي الدالة h المعرفة ب :

$$h(x) = \frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \quad ; \quad [-1;1]$$

.02 هل g قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ ؟

طريقة 1 :

نستعمل الصيغة للتمديد بالاتصال الدالة $[-1;1]$; $h(x) = \dfrac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$

لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2-\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}+1-\sqrt{1-x}}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \qquad ; \quad (2=1+1)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{1+x}}{x}+\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}\right]\times\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(1-\sqrt{1+x}\right)\left(1+\sqrt{1+x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+x}\right)}+\frac{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right]\times\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-1-x}{x\left(1+\sqrt{1+x}\right)}+\frac{1-1+x}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right]\times\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

و منه : $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=0\in\mathbb{R}$

خلاصة : الدالة h قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ و العدد المشتق في $x_0=0$ هو $h'(0)=0$.

طريقة 2 : اقترحتها التلميذة مباصو احسان

نستعمل الصيغة للتمديد بالاتصال الدالة : $\begin{cases} g(x)=f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \quad ; \quad [-1;1]\setminus\{0\} \\ g(0)=1 \end{cases}$

لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\left(x+\sqrt{1-x}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right)\left(\sqrt{1+x}+\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+x-x^2-2x\sqrt{1-x}-\cancel{1}+x}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right)} \quad ; \left(\left(x+\sqrt{1-x}\right)^2=x^2+2x\sqrt{1-x}+1-x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x-x^2-2x\sqrt{1-x}}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(2-x-2\sqrt{1-x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(\sqrt{1+x}+\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(2-x-2\sqrt{1-x}\right)}{x}\times\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left((2-x)-2\sqrt{1-x}\right)\left((2-x)+2\sqrt{1-x}\right)}{x\left((2-x)+2\sqrt{1-x}\right)}\times\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{4}-4x+x^2-\cancel{4(1-x)}}{x\left((2-x)+2\sqrt{1-x}\right)} \times \frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left((2-x)+2\sqrt{1-x}\right)} \times \frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\left((2-x)+2\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right)}$$

$$= 0 \quad ; \quad \left(\lim_{x\to 0} x=0 \ ; \ \lim_{x\to 0}\left((2-x)+2\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\left(x+\sqrt{1-x}\right)\right)=4\times 2=8\right)$$

و منه : $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0\in\mathbb{R}$.

خلاصة : الدالة g قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ و العدد المشتق في $x_0=0$ هو $g'(0)=0$.

03.

لنعتبر $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ الدالة المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$.

01. هل f قابلة للاشتقاق على $]0;1[$ ؟

لدينا الدالة : $x\mapsto x(1-x)$ قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على $]0;1[$ ومنه الدالة $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$ قابلة للاشتقاق على $]0;1[$

02. ندرس قابلة للاشتقاق f على يمين $x_0=0$ ؟ أعط تأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها .

ندرس اشتقاق f على يمين $x_0=0$

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x(1-x)}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x(1-x)}\times\sqrt{x(1-x)}}{x\sqrt{x(1-x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}(1-x)}{\cancel{x}\sqrt{x(1-x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-x)}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$=+\infty \quad ; \quad \left(\lim_{x\to 0^+}1-x=1 \ ; \ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x(1-x)}=0^+\right)$$

ومنه : $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty\notin\mathbb{R}$.

خلاصة : الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$

تأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها منحنى الدالة f يقبل نصف مماس علي يمين $x_0 = 0$ موازي لمحور الأراتيب .

.03 هل f قابلة للاشتقاق على يسار $x_0 = 1$ ؟

ندرس اشتقاق f على يسار $x_0 = 1$

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x(1-x)}-0}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x(1-x)}\times\sqrt{x(1-x)}}{(x-1)\sqrt{x(1-x)}}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{x\cancel{(1-x)}}{\cancel{(x-1)}\sqrt{x(1-x)}}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\sqrt{x(1-x)}}\\
&= +\infty \qquad ; \qquad \left(\lim_{x\to 0^+} x = 1 \ ; \ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x(1-x)} = 0^+\right)
\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty \notin \mathbb{R}$.

خلاصة : الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار $x_0 = 1$

.04

.01 أحسب $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f لكل حالة من الحالات التالية .

لدينا :

- $$f'(x) = \left[\frac{3x-5}{2-x}\right]' = \left[\frac{3x-5}{-x+2}\right]' = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\times\frac{1}{(-x+2)^2} = \frac{6-5}{(-x+2)^2} = \frac{1}{(-x+2)^2}$$

- $$f'(x) = \left[\frac{x^2+16}{x+4}\right]' = \frac{(x^2+16)'(x+4)-(x^2+16)(x+4)'}{(x+4)^2} = \frac{2x(x+4)-(x^2+16)\times 1}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x-16}{(x+4)^2}$$

- $$f'(x) = \left[\sqrt{x^2-5x+6}\right]' = \frac{\left[x^2-5x+6\right]'}{2\sqrt{x^2-5x+6}} = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}} \ .$$

- $$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[x^3\sqrt{4x+1}\right]' = (x^3)'\times\sqrt{4x+1}+x^3\times\left[\sqrt{4x+1}\right]' = 3x^2\sqrt{4x+1}+x^3\times\frac{(4x+1)'}{2\times\sqrt{4x+1}}\\
&= 3x^2\sqrt{4x+1}+\frac{4x^3}{2\times\sqrt{4x+1}}
\end{aligned}$$

- $$f'(x)=\left[(5x+1)^4\right]'=4(5x+1)'\times(5x+1)^3=4\times5\times(5x+1)^3=20(5x+1)^3$$

- $$f'(x)=\left[\sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}\right]'=\left[\frac{3x-5}{2-x}\right]'\times\frac{1}{2\times\sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}}=\begin{vmatrix}3&-5\\-1&2\end{vmatrix}\times\frac{1}{(-x+2)^2}\times\frac{1}{2\times\sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}}$$
$$=1\times\frac{1}{(-x+2)^2}\times\frac{1}{2\times\sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}}=\frac{1}{2(-x+2)^2\times\sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}}$$

- $$f'(x)=\left[\frac{x+2}{\sqrt{x+7}}\right]'=\frac{(x+2)'\sqrt{x+7}-(x+2)\left(\sqrt{x+7}\right)'}{\sqrt{x+7}^2}=\frac{1\times\sqrt{x+7}-(x+2)\frac{(x+7)'}{2\times\sqrt{x+7}}}{\sqrt{x+7}^2}$$
$$=\frac{2(x+7)-(x+2)}{2(x+7)\times\sqrt{x+7}}=\frac{x+12}{2(x+7)\times\sqrt{x+7}}$$

- $$f'(x)=\left[\frac{x+2}{\sqrt{x}+8}\right]'=\frac{(x+2)'\left(\sqrt{x}+8\right)-(x+2)\left(\sqrt{x}+8\right)'}{\left(\sqrt{x}+8\right)^2}=\frac{1\times\left(\sqrt{x}+8\right)-(x+2)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+8\right)^2}$$
$$=\frac{2x+16\sqrt{x}-x-2}{2\sqrt{x}\times\left(\sqrt{x}+8\right)^2}=\frac{x+16\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}\times\left(\sqrt{x}+8\right)^2}$$

- $$f'(x)=\left[\frac{x+2}{3-x}\sqrt{x^2+1}\right]'=\left[\frac{x+2}{3-x}\right]'\times\sqrt{x^2+1}+\left[\frac{x+2}{3-x}\right]\times\left[\sqrt{x^2+1}\right]'$$
$$=\begin{vmatrix}3&-5\\-1&2\end{vmatrix}\times\frac{1}{(-x+2)^2}\times\sqrt{x^2+1}+\frac{x+2}{3-x}\times\left[\sqrt{x^2+1}\right]'$$
$$=\frac{1}{(-x+2)^2}\times\sqrt{x^2+1}+\frac{x+2}{3-x}\times\frac{\left[x^2+1\right]'}{2\times\left[\sqrt{x^2+1}\right]}=\frac{1}{(-x+2)^2}\times\sqrt{x^2+1}+\frac{x+2}{3-x}\times\frac{x}{\left[\sqrt{x^2+1}\right]}$$

- ملحوظة : $$\left[\frac{ag(x)+b}{cg(x)+d}\right]'=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\times\frac{1}{\left(cg(x)+d\right)^2}\times g'(x)$$

- $$f'(x)=\left[\frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+8}\right]'=\begin{vmatrix}3&2\\1&8\end{vmatrix}\times\frac{1}{\left(\sqrt{x}+8\right)^2}\times\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{22}{\left(\sqrt{x}+8\right)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{11}{\left(\sqrt{x}+8\right)^2\times\sqrt{x}}$$

- $$f'(x)=\left[\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]'=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\times\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\times\sqrt{x^2+1}}-\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\times\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{2x}{2\times\sqrt{x^2+1}}-\frac{2x}{2\times\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{x\left(x^2+1\right)-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

- $f'(x)=\left[x^2+3\sin x\right]'=2x+3\cos x$
- $f'(x)=\left[\sqrt{x}+7\cos x\right]'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-7\sin x$
- $f'(x)=\left[\sin(4x)+\cos(7x+1)\right]'=4\cos(4x)-7\sin(7x+1)$
- $f'(x)=\left[\frac{1}{x}+\tan x\right]'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{-\cos^2 x+x^2}{x^2\cos^2 x}$; $\left((\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x\right)$.
- $f'(x)=\left[\frac{3}{\sin x}\right]'=-3\times\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=\frac{-3\cos x}{\sin^2 x}$.
- $f'(x)=\left[\sqrt[7]{x}\right]'=\left[x^{\frac{1}{7}}\right]'=\frac{1}{7}\times x^{\frac{1}{7}-1}=\frac{1}{7}\times x^{\frac{-6}{7}}=\frac{1}{7}\times\sqrt[7]{x^{-6}}=\frac{1}{7}\times\frac{1}{\sqrt[7]{x^6}}$.
- $f'(x)=\left[\sqrt[5]{x^7}\right]'=\left[x^{\frac{7}{5}}\right]'=\frac{7}{5}\times x^{\frac{7}{5}-1}=\frac{7}{5}\times x^{\frac{2}{5}}=\frac{7}{5}\times\sqrt[5]{x^2}$.
- $f'(x)=\left[\sqrt[6]{x^2+2x-3}\right]'=\left[\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{1}{6}}\right]'=\frac{1}{6}\times\left(x^2+2x-3\right)'\times\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{1}{6}-1}$
  $=\frac{1}{6}\times(2x+2)\times\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{-5}{6}}=\frac{1}{3}\times\frac{x+1}{\sqrt[6]{\left(x^2+2x-3\right)^5}}$
- $f'(x)=\left[\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{2}{5}}\right]'=\frac{2}{5}\times\left(x^2+2x-3\right)'\times\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{2}{5}-1}=\frac{2}{5}\times(2x+2)\times\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{-3}{5}}$
  $=\frac{2}{5}\times(2x+2)\times\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{-3}{5}}=\frac{4x+4}{5\times\sqrt[5]{\left(x^2+2x-3\right)^3}}$

.05

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt[6]{x^2+2x-3}=\sqrt[6]{(x-1)\times(x+3)}$

.01 نحدد مجموعة تعريف الدالة f.

لدينا :
$$x\in D_f\Leftrightarrow(x-1)\times(x+3)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-3\right]\cup\left[1;+\infty\right[$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=\left]-\infty;-3\right]\cup\left[1;+\infty\right[$

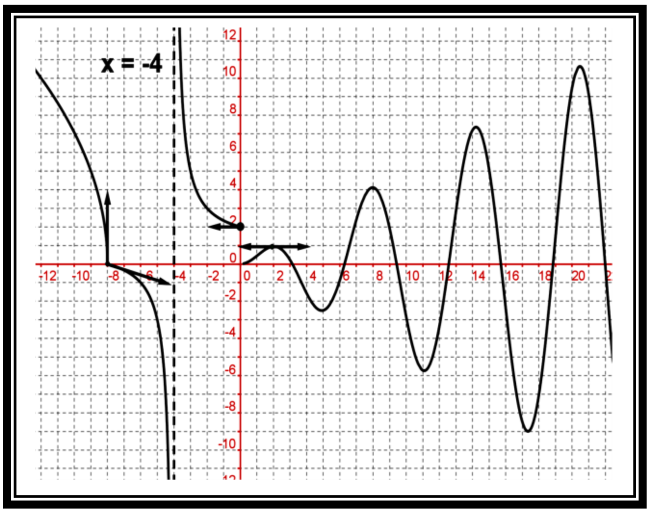
.02 نحسب f' على $\left]-\infty,-3\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

لدينا :
$$f'(x)=\left[\sqrt[6]{x^2+2x-3}\right]'=\left[\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{1}{6}}\right]'=\frac{1}{6}\left(x^2+2x-3\right)'\times\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{1}{6}-1}$$
$$=\frac{1}{6}(2x+2)\times\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{-5}{6}}=\frac{x+1}{3\times\sqrt[6]{\left(x^2+2x-3\right)^5}}$$

خلاصة : $f'(x)=\dfrac{x+1}{3\times\sqrt[6]{\left(x^2+2x-3\right)^5}}$

06.

الشكل الآتي يمثل منحنى دالة f في المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(0,\vec{i},\vec{j})$.



01. استنتج مبيانيا النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$.

مبيانيا لدينا :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=0$

أما عند $+\infty$ الدالة f ليس لها نهاية .

02. أ – ندرس مبيانيا اتصال الدالة f على يمين 0 : الدالة f غير متصلة على يمين 0 (لأن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=0$ و $f(0)=2$)

ب- أدرس مبيانيا اتصال الدالة f على يسار 0. الدالة f متصلة على يسار 0 (لأن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=2=f(0)$ و $f(0)=2$)

ج – هل f . متصلة في 0 ؟ f غير متصلة في 0 .

03. أ - هل f قابلة للاشتقاق في -8 ؟ f غير قابلة للاشتقاق في -8 (هناك نقطة مزواة)

ب – ما هو العدد المشتق على يسار 0. العدد المشتق على يسار 0 هو $f'(0)=0$ (لأن نصف المماس على يسار 0 موازي لمحور الأفاصيل)

ج - أعط معادلة المماس في 2. لدينا: معادلة المماس في 0 هي $y=1$ (يمكنك استعمال $f(0)=1$ و $f'(0)=0$)

07.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+4} & ; x\geq0\\ f(x)=3x^2+2; & x<0\end{cases}$$

01. أ – نحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}=+\infty$; $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+4=+\infty\right)$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2+2=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty$

ب ـ ندرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=0$. $f(0)=2$

- اتصال الدالة f على يمين النقطة $x_0=0$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x^2+4}=2=f(0)\ ;\ \left(\lim\limits_{x\to0^+} x^2+4=4\right)$

ومنه : الدالة f متصلة على يمين النقطة $x_0=0$.

- اتصال الدالة f على يسار النقطة $x_0=0$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} 3x^2+2=2=f(0)\ ;\ \left(\lim\limits_{x\to0^-} 3x^2+2=2\right)$

ومنه : الدالة f متصلة على يسار النقطة $x_0=0$.

خلاصة : الدالة f متصلة على النقطة $x_0=0$.

.02 أ- أدرس اشتقاق الدالة f على يسار النقطة $x_0=0$ ؛ ثم أعط تأويلا هندسيا لنتيجة المحصل عليها.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\lim_{x\to0^+}\frac{3x^2+2-2}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\\&=\lim_{x\to0^+}3x\\&=0\end{aligned}$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\in\mathbb{R}$

خلاصة : الدالة f قابلة للاشتقاق على يسار النقطة $x_0=0$ و $f_g'(0)=0$

تأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يسار $x_0=0$ موازي لمحور الأفاصيل .

ب - ندرس اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0=0$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\cancel{2}}+4-4}{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

$$= 0 \qquad ; \left(\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+4}+2 ; \lim_{x\to 0^+} x = 0\right)$$

ومنه : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \in \mathbb{R}$

خلاصة : الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين النقطة $x_0 = 0$ و $f_d'(0) = 0$

ج – هل الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 = 0$.

نعم الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 = 0$ لآن f قابلة للاشتقاق على يمين و يسار $x_0 = 0$ و $f_d'(0) = f_g'(0)$

.03 أ - أحسب الدالة المشتقة f' ل f على المجال $]0+\infty[$ ثم حدد إشارتها على $]0+\infty[$.

لدينا : $f'(x) = \left[\sqrt{x^2+4}\right]' = \frac{(x^2+4)'}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ ومنه : $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

إشارة : f' على المجال $]0+\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} > 0$

ب - أحسب الدالة المشتقة f' ل f على المجال $]-\infty,0[$ ثم حدد إشارتها على $]-\infty,0[$.

لدينا : $f'(x) = \left[3x^2+2\right]' = 6x$ ومنه : $f'(x) = 6x$

إشارة : f' على المجال $]-\infty,0[$ لدينا : $f'(x) = 6x < 0$

ج – نعطي جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$ هو كالتالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

.04 أعط معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة $x_1 = 2$.

ومنه :

معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة $x_1 = 2$ هي : $(x_0 = 2)$ $y = (x-x_0)f(x_0) - f(x_0)$ مع $f(2) = 2\sqrt{2}$ و $f'(2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ومنه : $y = (x-2)f'(2) - f(2) = (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$.

خلاصة : معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة $x_1 = 2$ هي : $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$

.05 أ - ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]-\infty,0]$. بين أن : g تقبل دالة عكسية g^{-1} من J إلى I مع تحديد J.

لدينا : الدالة f متصلة و تناقصية قطعا على $I=]-\infty,0]$ إذن g قصور الدالة f على المجال $I=]-\infty,0]$ فهي متصلة و تناقصية قطعا على $I=]-\infty,0]$.

ومنه : g تقبل دالة عكسية g^{-1} من J إلى I تحديد J ؛ لدينا : $J=g(I)=g(]-\infty,0])=[2;+\infty[$

و بالتالي: $J=[2;+\infty[$

خلاصة : g تقبل دالة عكسية g^{-1} من $J=[2;+\infty[$ إلى $I=]-\infty,0]$.

ب - نحدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

ليكن : $x\in I=]-\infty,0]$ و $y\in J=[2;+\infty[$ نضع : $f(x)=y$ و $f^{-1}(y)=x$

ومنه :

$$f(x)=y \Leftrightarrow 3x^2+2=y$$
$$\Leftrightarrow x^2=y-2 \quad ; \quad (y\geq 2)$$
$$\Leftrightarrow x=\sqrt{y-2}\notin I=]-\infty,0] \text{ أو } x=-\sqrt{y-2}\in I=]-\infty,0]$$

ومنه : $x=-\sqrt{y-2}$

خلاصة : الدالة العكسية g^{-1} من J إلى I مع :
$$g^{-1}: J=[2;+\infty[\to I=]-\infty,0]$$
$$x\mapsto g^{-1}(x)=-\sqrt{x-2}$$