

## LIMITES DE SUITES EXERCICES CORRIGES

### Exercice n°1.

Déterminer la limite (éventuelle) des suites  $(u_n)$  ci-dessous :

1)  $u_n = 1 + \frac{1}{2^n}$

2)  $u_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3)  $u_n = 7 + \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

4)  $u_n = 3 \times (-2)^n$

5)  $u_n = 5^n - 4^n$

6)  $\frac{3^n + 2}{8^n - 1}$

7)  $u_n = \frac{1}{n+3}$

8)  $u_n = \frac{2n}{n+1}$

9)  $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n}$

### Exercice n°2.

Montrez que la suite  $(u_n)$  satisfait la relation (R), puis vous en déduisez la limite de cette suite.

a)  $u_n = \frac{\cos n}{n+1}$  (R):  $|u_n| \leq \frac{1}{n+1}$

b)  $u_n = \sin(2n) + n$  (R):  $u_n \geq n - 1$

c)  $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}$  (R):  $|u_n| \leq \frac{n+1}{n^2+1}$

d)  $u_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2}$  (R):  $u_n \geq \frac{n-1}{3}$

### Exercice n°3.

On considère une suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$ . On pose  $v_n = u_n - 3$ .

1) a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme  $v_0$

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

### Exercice n°4.

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 - n \end{cases}$  pour tout entier naturel  $n$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $n \leq u_n$ . Qu'en déduit-on ?

### Exercice n°5.

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$

1) a) Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

b) Quel semble être la limite de  $(u_n)$  ?

2) Montrer que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n^2 - 4$  est géométrique.

En déduire la limite de la suite  $(v_n)$  puis celle de la suite  $(u_n)$

### Exercice n°6.

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout  $n$ ,  $0 \leq u_n < 2$

2) On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n$  par  $v_n = 2 - u_n$

a) Quel est le signe de  $v_n$  ?

b) Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$ , puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que  $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) En déduire la limite de la suite  $(v_n)$  puis celle de la suite  $(u_n)$

Exercice n°7.

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que  $(u_n)$  est majorée par 4.
- b) Montrer que  $(u_n)$  est strictement croissante
- c) En déduire que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
- 2) a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$
- b) Retrouver le résultat du 1.c)
- c) Etudier la convergence de la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = n^2(4 - u_n)$

Exercice n°8.

On considère la suite  $u$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$
- 2) Montrer que la suite  $u$  est strictement croissante.
- 3) Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°9.

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$ .

- 1) Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près des quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$
- 2) Montrer par récurrence que pour tout entier  $n$ , si  $0 < u_n < 2$
- 3) Résoudre l'inéquation  $-x^2 + x + 2 \geq 0$
- 4) Exprimer  $u_{n+1} - u_n$  en fonction de  $u_n$ . Déduire de ce qui précède que  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  pour tout entier  $n$ . Quel est le sens de variation de la suite  $(u_n)$  ?
- 5) Montrer que pour tout  $n$ ,  $|u_{n+1} - 2| < \frac{1}{2}|u_n - 2|$ .
- 6) En déduire que pour tout  $n$ ,  $|u_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$ .
- 7) Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite  $(u_n)$  ?

Exercice n°10.

Soit  $\theta$  un réel tel que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

La suite  $(u_n)$  est définie par :  $u_0 = 2 \cos \theta$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$  pour tout entier naturel  $n$

- 1) Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de  $\theta$  (On rappelle que, pour tout réel  $x$ , on a :  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ )
- 2) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = 2 \cos \left(\frac{\theta}{2^n}\right)$
- 3) Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = \frac{\theta}{2^n}$ . Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$
- 4) En déduire que  $(u_n)$  est convergente ; quelle est sa limite ?

Exercice n°11.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par son premier terme  $u_0 > 0$  et la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{3}{u_n} \right)$

1) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ . Pour quelle valeur de  $u_0$  la suite est-elle stationnaire ?

2) On pose  $u_0 = 1$ .

a) Démontrer les relations suivantes :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{3})^2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} (u_n + \sqrt{3})^2$

b) Démontrer que  $(u_n)_n$  est une suite strictement décroissante pour  $n \geq 1$

c) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3) On définit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

a) Calculer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ . En déduire l'expression de  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_1$  et de  $n$ .

b) Calculer la limite de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et retrouver la limite de  $(u_n)_n$

Exercice n°12.

On définit deux suites  $u$  et  $v$  par  $u_0 = 1, v_0 = 12$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

1) On appelle  $w$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $w_n = v_n - u_n$

a) Montrer que  $w$  est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison

b) Déterminer la limite de la suite  $w$

2) a) Montrer que la suite  $u$  est croissante

b) Montrer que la suite  $v$  est décroissante

c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

3) Montrer que les deux suites  $u$  et  $v$  convergent et ont la même limite que l'on appellera  $l$

4) On appelle  $t$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $t_n = 3u_n + 8v_n$

a) Montrer que  $t$  est une suite constante. Déterminer cette constante

b) Déterminer alors la valeur de  $l$

Exercice n°13.

On considère un carré  $F_1$  de côté de longueur 1. Au milieu de chaque côté, à l'extérieur de  $F_1$ , on place un carré de côté  $1/3$ , dont on supprime le côté en contact avec la figure initiale. On obtient ainsi une figure  $F_2$ .



On procède de même avec  $F_2$ . On obtient ainsi une nouvelle figure  $F_3$ . En réitérant le procédé, on construit une suite  $(F_n)$  de figures. On note  $p_n$  le périmètre de  $F_n$ .

1) Tracer  $F_3$ .

2) Exprimer en fonction de  $n$ :

a)  $c_n$ , le nombre de côtés de  $F_n$ .

b)  $l_n$ , la longueur de chaque côté de  $F_n$ .

c)  $p_n$ , le périmètre de  $F_n$ .

3) La suite  $(p_n)$  converge-t-elle?

On note  $A_n$  l'aire de  $F_n$ .

4) Exprimer  $A_{n+1}$  en fonction de  $A_n$ .

5) En déduire  $A_n$  en fonction de  $n$ .

6) Montrer que  $(A_n)$  converge et calculer sa limite.

7) Quelles réflexions vous inspire ce problème?