TD : Exercices d'application et de réflexions

TD : Exercices
Sur LES SUITES NUMERIQUES

Exercice1 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{5u_n+3}{u_n+3} \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Et Soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1)montrer que $0\le u_n \le 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) a)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3) montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

4) déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

5) déterminer $\lim v_n$ et $\lim u_n$

Exercice2 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n} \\ u_1 = 1 \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Et Soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n = \dfrac{1}{u_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$ 1)calculer : u_1 et v_0

2) montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

3) déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

4) déterminer $\lim v_n$ et $\lim u_n$

Exercice3 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+2} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : 0\le u_n$

3- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n \le 2$

Exercice4 : soit $(v_n)_{n\ge1}$ la suite définie par :

$v_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

1)Montrer que $(v_n)_{n\ge1}$ est minorée par 0

2)Montrer que $(v_n)_{n\ge1}$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$

3)Que peut-on déduire ?

Exercice5 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice6 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = (-1)^n \sin\sqrt{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice7 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+2} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer par récurrence que $u_n \le u_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Exercice8 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice9 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 10:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente

définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4

3)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice11 : Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répond-t-il, donne-moi seulement 1 centime le 1er juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne mois la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

Exercice12 : calculer en fonction de n la somme suivante :

$$s_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Exercice13 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \dfrac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \\ u_0 = 2; u_1 = \dfrac{4}{9} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n - \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que $u_{n+1} = \dfrac{1}{9}u_n + \dfrac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a)Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

b) écrire v_n et u_n en fonction de n

c) calculer la somme : $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Exercice14 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in]-1;0[\end{cases}$$

1) Montrer que $-1 \prec u_n \prec 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrer que $u_{n+1} \geq \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Et en déduire que : $u_n \geq \dfrac{u_0}{\left(\sqrt{u_0 + 2}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice15 : Utiliser les Opération sur les limites des suites pour calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{3n}} - \dfrac{2}{3n} + \dfrac{5}{n^2} - 1$ ***2)*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-3 + \dfrac{1}{n}\right)\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - n$ ***4)*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} - 2n$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 - 2n - 5$ ***6)*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 - 3n + 2} - n$

Exercice16 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9n-3}{3n+5}$ 4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2-9}{3n+1}$ 5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{n^5+3n-4}$

Exercice 17 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^5 + 2n^3 - n + 4}$

Exercice 18 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$$v_n = 2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1)montrer que : $v_n \geq \dfrac{4}{3}n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2)en déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice19 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$$v_n = 3n + 5\sin n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 20 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n = -4n + 3\cos n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 21 : soit (u_n) la suite définie par :

$u_n = 3 + \dfrac{\sin n}{n^3} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 22 : calculer : $\lim \dfrac{\sin n}{n}$

Exercice 23 : soit $(v_n)_{n\geq 4}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{5v_n}{n+1} \\ v_4 = 10 \end{cases}$

montrer que La suite $((v_n)_{n\geq 4}$ est convergente.

Exercice 24 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n+2}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n - 2\sin\frac{1}{n}}{4n + \sin\frac{1}{n}}$

Exercice 25 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_{n+1} = v_n + n^4 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ et $v_0 = 1$

montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Exercice 26 : Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x^2 + x + 1$

1. Monter que la suite (u_n) est croissante
2. Montrer que la suite (u_n) est non majorée (Par absurde) .
3. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 27 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n = \sqrt{\dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 28 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\left(\dfrac{\pi n + 1}{3n + 4}\right)$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\sqrt{\dfrac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

Exercice 29 : calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5)^n$

Exercice 30 : calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{n\to+\infty} (0,7)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (4)^{-n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(5)^n}{(4)^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (3)^n - \dfrac{1}{2^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n}$

Exercice 31 : Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$

1. Déterminer le point d'intersection de C_f avec la droite (Δ) $y = x$
2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite (u_n)

b) Conjecturer la monotonie de la suite (u_n) et sa limite potentielle.

3. Montrer que la suite (u_n) est croissante majorée par 2.
4. Soit la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n + \alpha$

a) Déterminer α pour que la suite (v_n) soit géométrique.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 32 : Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

1) Etudier les variations de f sur $I = [0,1]$ et Montrer que $f(I) \subset I$

2) a) Montrer que :($\forall n \in \mathbb{N}$) $u_n \in I = [0,1]$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercices 33 : Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+2}$

1. Etudier les variations de f et déterminer f ([0,2])
2. a) Montrer que :($\forall n \in \mathbb{N}$) $u_n \in I = [0,2]$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercices 34 : Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$

et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
2. Montrer que ($\forall n \in \mathbb{N}$)($v_n > u_n$)
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Exercice35 : Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a$ et $v_0 = b$ avec $0 < a < b < 2a$

$u_n v_n = ab$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$

1. Montrer que ($\forall n \in \mathbb{N}$)($0 < u_n < v_n$)
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante
3. a) Montrer ($\forall n \in \mathbb{N}$) $v_{n+1} - u_{n+1} \prec \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$

b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n$

Exercice 36 : Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

2) calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n$

Exercice37: Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et

$v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

2) calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n$

Exercice38: Soit les suites numériques : (x_n) et (u_n) et (v_n) définies par : $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et

$u_n = x_{2n}$ et $v_n = x_{2n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Exercice39 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

1)Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

2) on pose : $\alpha_n = u_{2n+1}$ et $\beta_n = u_{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (α_n) est croissante et que la suite (β_n) est décroissante

b) Montrer que : $\alpha_n \le \beta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Montrer que : ($\forall n \in \mathbb{N}$) $\dfrac{1}{2} \le u_n \le 1$

4) Montrer que $|u_{n+1} - u_n| \le \dfrac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

5) calculer : $\lim \alpha_n - \beta_n$

Exercice40 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{12u_n}{9+u_n^4}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $1 \le u_n \le \sqrt{\sqrt{3}}$

2)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Et en déduire sa convergence et sa limite

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien