EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice1:

Soit (u_n) la suite définie par :

$$(\forall n \in IN);\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \quad et \quad u_0 = 2$$

1) Calculer u_1 et u_2 .
2) Montrer que : $(\forall n \in IN);\ u_n < 6$.
3) Etudier la monotonie de (u_n).
4) Soit la suite (v_n) définie sur IN par: $v_n = u_n - 6$
   a) Calculer v_0 et v_1 .
   b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique .
   c) Exprimer v_n en fonction de n .
   d) En déduire u_n en fonction de n.
5) Exprimer S_n et w_n en fonction de n :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$$
$$w_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$

6) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

Exercice2 :

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par: pour tout entier naturel n,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$. En déduire la limite de (u_n).
2) a. Déterminer la monotonie de la suite (S_n).
   b. Calculer S_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice3:

Soient (u_n) et (v_n) deux suites tel que:

$$(\forall n \in IN); u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} \ / \ u_0 = 1 \ et \ v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$$

1) Calculer u_1 et v_0 .
2) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.
3) Exprimer v_n en fonction de n .
4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5) Exprimer S_n en fonction n: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.
6) En déduire la valeur de S : $S = v_0 + v_1 + ... + v_{99}$.
7) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice4:

Soit (u_n) une suite définie par:

$$u_0 = 2 \quad et \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \quad avec\ n \in IN$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in IN);\ u_n > 1$.
   b) Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2) Soit (v_n) une suite tel que : $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$
   a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont-on précisera son premier terme et sa raison.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de (u_n).

Exercice5:

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN par

$$u_{n+1} = \frac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}} \quad et \quad u_0 = 0$$

1) Montrer que : $(\forall n \in IN);\ 0 \le u_n \le 1$
2) a) Montrer que : $(\forall n \in IN);\ u_{n+1} \ge \frac{1+u_n}{2}$
   b) Etudier la monotonie de la suite (u_n).
3) a) Vérifier que : $(\forall n \in IN); 1 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(1-u_n)$.
   b) En déduire que $(\forall n \in IN); u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   c) calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice6:

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n} \quad et \quad u_0 = 1$$

1) a- Montrer que : $(\forall n \in IN); u_n \ge 0$.
   b- Montrer que: $(\forall n \in IN); u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n(1+u_n)}{2+u_n}$
   c- Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2) Soit (v_n) la suite réelle définie par : $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.
   a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c- Calculer la limite de la suite (u_n).