

**Exercice 1 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = [1;2]$  par :  $f(x) = \frac{5x-1}{x+3}$ .

- ① - Etudier les variations de la fonction  $f$ .
- ② - Montrer que :  $f(I) \subset I$ .
- ③ - Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$ .
  - a - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq u_n \leq 2$ .
  - b - Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
  - c - Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 2 :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3+x^2}$ .

- ① - Etudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
- ② - Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = x$ .
- ③ - Montrer que :  $(\forall x \in [0;1]) : f(x) \geq x$ .
- ④ - Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$ .
  - a - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$ .
  - b - Déterminer le sens des variations de la suite  $(u_n)$ .
  - c - Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 3 :****1<sup>ère</sup> partie :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = \left( \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right)^2$ .

- ① - Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- ② - Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.
- ③ - a - Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x > 0$ .  
b - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- ④ - Etudier les positions relatives de  $(\mathcal{C}_f)$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$ .
- ⑤ - Etudier la concavité de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .
- ⑥ - Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

☺ 2<sup>ème</sup> partie :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$ .

- ① - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 4$ .
- ② - Déterminer le sens des variations de la suite  $(u_n)$ .
- ③ - Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

☺ 3<sup>ème</sup> partie :

Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}$ .

- ① - Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique et déterminer sa raison.
- ② - Calculer  $v_n$  Puis en  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- ③ - Calculer :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

🐞 Exercice 4 :

☺ 1<sup>ère</sup> partie :

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - x$ .

① - a - Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = x \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 \right)$ .

b - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et étudier la branche infinie de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

② - a - Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b - Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .

c - Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

③ - a - Montrer que :  $(\forall x \in ]0; 1[) : f(x) - x = x \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2 \right)$ .

b - En déduire que :  $(\forall x \in ]0; 1[) : f(x) > x$ .

④ - a - Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

b - Montrer que le réel  $\alpha$  vérifie :  $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$ , puis en déduire la valeur de  $\alpha$ .

☺ 2<sup>ème</sup> partie :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{8} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$ .

- ① - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{8} \leq u_n < 1$ .
- ② - Déterminer le sens des variations de la suite  $(u_n)$ .
- ③ - Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.