

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1:

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = i^{2020} ; \quad z_2 = (3 - \sqrt{2}i)^2 ; \quad z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}i}$$

$$z_4 = \frac{(1-2i)^2 - (1-i)^3}{(1+3i)^3 + (1+i)^2} ; \quad z_5 = \frac{1}{7-4i}$$

$$z_6 = \frac{1+i}{1-i} ; \quad z_7 = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i} + \frac{i}{2}$$

EXERCICE2:

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$.

2) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , les points d'affixes respectives A, B et C , tel que :

$$z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; \quad z_B = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad z_C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

3) On désigne par A' l'image du point A par la

rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Placer le point A' et démontrer que le triangle $AA'C$ est isocèle en A .

4) On désigne par B' l'image du point B par la

rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

- Placer le point B' , et exprimer l'affixe $z_{B'}$ en fonction z_B .

- En déduire la forme trigonométrique et la forme algébrique de $z_{B'}$.

5) Calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

EXERCICE3: (Session normale 2016)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 4bz + 29 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et Ω d'affixes respectives a, b et ω telles que :
 $a = 5 + 2i ; b = 5 + 8i$ et $\omega = 2 + 5i$

a) Considérons $u = b - \omega$. Vérifier que $u = 3 + 3i$,

puis montrer que $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

b) Déterminer un argument du nombre complexe \bar{u} .

c) Vérifier que: $a - \omega = \bar{u}$, en déduire que

$$\Omega A = \Omega B \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

d) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image du point A par la rotation R .

EXERCICE4: (Session normale 2019)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C

et D d'affixes respectives : $a = 1 - i\sqrt{3}$;

$$b = 2 + 2i ; c = \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad d = -2 + 2\sqrt{3}$$

a) Vérifier que : $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$.

b) En déduire que A, B, C et D sont alignées.

3) On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe M' l'image du point M par la rotation R de centre

O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Vérifier que $z' = \frac{1}{2}az$

4) Soit $H(h)$ l'image du point B par la rotation R , et le point $P(p)$, tel que $p = a - c$

a) Vérifier que : $h = ip$.

b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O .

EXERCICES5:

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v})

direct. On considère les points A, B, C et D d'affixes

respectives $a = 1 ; b = 3 + 4i ;$

$$c = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad d = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3}).$$

L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C .

1) a. Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D .

b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle (C) de centre A dont on déterminera le rayon.

2) Soit F , l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.

b. Montrer que le point F est le milieu de $[CD]$.

c. Montrer que $\frac{c - z_F}{a - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme

exponentielle de $\frac{c - z_F}{a - z_F}$. Déduire des questions

précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.

EXERCICE6:

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct

(O, \vec{u}, \vec{v}) . Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que:

$$1) |z - 1 + 2i| = 4 \quad 2) |z - 2 + i| = |\bar{z} + 2 - 2i|$$

$$3) |iz - 2 + i| = 6 \quad 4) |\bar{z} - 1 + 2i| = |z - 3 - i|$$

$$5) z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = -1 \quad 6) \arg(z) = \frac{\pi}{4} [\pi]$$

EXERCICE7:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2i$; $b = -\sqrt{3} + i$ et $c = -\sqrt{3} - i$.

- 1) Placer les points A, B et C sur une figure.
- 2) Soit $Z = \frac{a-b}{c-b}$.
 - a. Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$.
 - b. Écrire Z sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.
 - c. En déduire la nature du triangle ABC .
 - d. Déterminer $(\overline{BC}, \overline{BA})$.

EXERCICE8:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , et f la transformation du plan qui à M d'affixe z associe M' d'affixe z' tel que : $z' = 4z + 6 - 3i$.

Déterminer l'unique point invariant de f et en déduire la nature et les éléments caractéristique de f .

EXERCICE9:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2, b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 1 - i\sqrt{3}$.

- 1) a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
 - b. Démontrer que les points A, B et C sont sur un même cercle (Γ) de centre O .
 - c. Construire le cercle (Γ) .
- 2) Déterminer un argument du nombre complexe b , et en déduire $(\overline{OA}, \overline{OB})$. Quelle est la nature du triangle OAB ?

EXERCICE10:

Soit m un nombre complexe de module 2, a et b deux nombres complexes tel que :

$$a = 1 + i + m \quad \text{et} \quad b = 1 - i + m$$

- 1) Déterminer m pour que a et b soient conjugués.
- 2) Déterminer m pour que a et b soient de même module
- 3) Déterminer m pour que $a + ib = 0$.

EXERCICE11:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

- 1) a- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.
 - b- Ecrire les solutions sous la forme algébrique et trigonométrique.
- 2) On considère les points A et B d'affixes respectives $2 - 2i$ et $2 + 2i$.
 - a- Placer dans le plan les points A et B .
 - b- Quelle est la nature du triangle OAB ?

3) Soit le point C d'affixe : $z_C = (2 - 2i) \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$.

- a- Ecrire z_C sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.
 - b- En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 4) a- Comparer OA et OC et donner une mesure de l'angle $(\overline{OA}, \overline{OC})$.
- b- quelle est la nature exacte du triangle OAC .

EXERCICE12: (Session normale 2015)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + 10z + 26 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives : $a = -2 + 2i$; $b = -5 + i$; $c = -5 - i$ et $\omega = -3$

- a) Vérifier que : $\frac{b - \omega}{a - \omega} = i$.
 - b) En déduire la nature du triangle ΩAB .
- 3) Soit D l'image du point C par la translation T de vecteur \vec{u} d'affixe $6 + 4i$.
- a) Montrer que l'affixe de D est $d = 1 + 3i$
 - b) Montrer que $\frac{b - d}{a - d} = 2$, en déduire que A est le milieu $[BD]$.

EXERCICE13:

- 1) Linéarisez $\cos^4 x$ et $\cos^4 x \times \sin^2 x$.
- 2) Calculer les deux intégrales I et J suivants :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x \times \sin^2 x) \, dx$$

EXERCICE14:

Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$, on pose $Z = \frac{iz(z-1)}{z+1}$.

- 1) Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes : $z + 1$; $z - 1$ et Z
- 2) Déterminer la partie réelle x de Z et la partie imaginaire y de Z .

EXERCICE15:

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

Posons :
$$Z = \frac{z - (4 + 2i)}{z + 2i}$$

- a) Déterminer la forme cartésienne de z' .
- b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit réel.
- c) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.
- d) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$