

○ **Exercice 01:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f(2) = \frac{-1}{2} \text{ et } f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x^2 - 5| - 1}; \text{ si } x \neq 2 .$$

- 1) Déterminer  $D_f$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- 2) Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 2$ .

○ **Exercice 02:**

⇒ On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(2) = 4 \text{ et } f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}, \text{ si } x \neq 2 .$$

- 1) Déterminer  $D_f$ .
- 2) Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 2$ .
- 3) a) Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}), f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1}$ .
- b) Justifier que  $f$  est continue sur chacun des intervalles  $] -\infty, -1[$  et  $] -1, +\infty[$ .

○ **Exercice 03:**

⇒ On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(-1) = \frac{-1}{2} \text{ et } f(x) = \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1+x^3}, \text{ si } x \neq -1 .$$

- 1) a) Déterminer  $D_f$ .
- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .
- 2) a) Vérifier que :  $(\forall x \in D_f), f(x) = \frac{2x-1}{(1-x)(1-x+x^2)}$ .
- b) En déduire que  $f$  est continue en  $x_0 = -1$ .

○ **Exercice 04:**

⇒ On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(1) = a \text{ et } f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x+3} - 2}{1-x^2}, \text{ si } x \neq 1 \text{ Où } a \in \mathbb{R} .$$

- 1) Déterminer  $D_f$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2) Pour quelle valeur de  $a$  la fonction  $f$  est-elle continue en  $x_0 = 1$ ?

○ **Exercice 05:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(1) = \frac{4}{3} \text{ et } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{x} - 2}; \text{ si } x \neq 1.$$

1) a) Justifier que  $D_f = \mathbb{R}^+$ .

b) Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$ .

2) a) Justifier que  $f$  est continue sur chacun des intervalles  $[0; 1[$  et  $]1; +\infty[$ .

b) En utilisant ce qui précède, montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

○ **Exercice 06:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x-2}; & x \geq 2 \\ \frac{3}{3-x}; & x < 2 \end{cases}$$

1) a) Justifier que  $D_f = \mathbb{R}$ .

b) Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 2$ .

2) a) Justifier que  $f$  est continue sur  $] -\infty; 2[$  et  $[2; +\infty[$ .

b) En utilisant ce qui précède, montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

○ **Exercice 07:**

⇒ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3 + \sin x + \cos x} - 2}{x}; & x > 0 \\ ax + \sqrt{x^2 + x + 1}; & x \leq 0 \end{cases}; \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.

3) a) Montrer que  $f$  est continue sur  $] -\infty; 0]$  et  $]0; +\infty[$ .

b) La fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$ ? Justifier votre réponse.

○ **Exercice 08:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f(1) = a \text{ et } f(x) = \frac{x^2 + x - 6\sqrt{x} + 4}{(x-1)^2}; \text{ si } x \neq 1; \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

✓ Déterminer la valeur de  $a$  pour laquelle  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

○ **Exercice 09:**

✓ Montrer que l'équation (E):  $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1; 2[$ .

○ **Exercice 10:**

⇒ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1 .$$

1)- Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  .

2)- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $a$  dans  $\left] \frac{-1}{2}; 0 \right[$  .

3)- Calculer  $f\left(\frac{-1}{4}\right)$  , puis en déduire un encadrement de  $a$  d'amplitude  $0,25$  .

4)- Montrer que  $\sqrt{a+1} = \frac{-2a}{a+1}$  , puis en déduire que  $a < \frac{-1}{4\sqrt{2}}$  .

○ **Exercice 11:**

⇒ On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$  .

1)- Déterminer  $D_f$  , puis calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$  .

2)- a)- Montrer que :  $(\forall x \in D_f), f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$  .

b)- Dresser le tableau de variation de  $f$  ( en justifiant votre réponse ) .

3)- Déterminer  $f\left(]-\infty, -2]\right)$ ,  $f\left([-2; -1[ \right)$  ,  $f\left(]-1; 0\right]$  et  $f\left([0; +\infty[ \right)$  .

4)- On désigne par  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = ]-\infty; -2]$  .

a)- Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera .

b)- Montrer que :  $(\forall x \in J), g^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$  .

○ **Exercice 12:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]-\infty; 3]$  par :  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  .

1)- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  , puis montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  .

2)- Montrer que  $f$  admet une bijection réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = [-1; +\infty[$  .

3)- Montrer que :  $(\forall x \in J), f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+1}$  .

○ **Exercice 13:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{x} - 2\sqrt{x+1}$  .

- 1) Justifier que  $D_f = [-1; 0[ \cup ]0; +\infty[$  .
- 2) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$  .
- 3) Montrer que  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$  .
- 4) a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\left] \frac{1}{4}; 1 \right[$  .
- b) Vérifier que :  $4\alpha^3 + 4\alpha^2 - 1 = 0$  .

○ **Exercice 14:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]-\infty; -1]$  par :  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  .

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ; puis montrer que  $f$  est continue sur  $I$  .
- 2) Montrer que :  $(\forall x \in I), f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$  ; puis déduire que  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  .
- 3) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = [-1; 0[$  .
- b) Calculer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$  .

○ **Exercice 15:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = [4; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{-x^2}{4} + x\sqrt{x} - x + 1 .$$

- 1) a) Vérifier que :  $(\forall x \in I), f(x) = 1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2$  .
- b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  .
- 2) a) Montrer que :  $(\forall x \in I), f'(x) = \frac{-1}{2}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$  , puis en déduire que  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  .
- b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $I$  , puis vérifier que  $\frac{64}{9} < \alpha < \frac{121}{16}$  .
- 3) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = ]-\infty; 1]$  .
- b) Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$  .
- c) En déduire que  $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$  .

○ **Exercice 16:**

⇒ On considère la fonction :  $f : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x}$  .

✓ Déterminer  $D_f$  ; puis calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$  .

○ **Exercice 17:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + x + 1 .$$

1)- Montrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]-1;1[$  .

2)- a)- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-1;1]$  .

b)- Montrer que  $f(\alpha) > 0$  ; puis en déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions dans  $]-1;1[$  .

○ **Exercice 18:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^3}$  .

1)- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$  .

2)- a)- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = ]-1; +\infty[$  .

b)- Calculer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$  .

○ **Exercice 19:**

✓ Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 + \sqrt[3]{4x} - \sqrt{4x+1}}{x-2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x + \sqrt[3]{x} - 2} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - \sqrt[3]{4x} \cdot \sqrt{4x+1}}{x-2} .$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} .$$

○ **Exercice 20:**

✓ Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{3x^4 + x} - 4}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - x} - \sqrt[3]{x^3 + 2x}}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x} - 3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \right)$$

○ **Exercice 21:**

⇒ Soit  $a, b, c$  des nombres réels strictement positifs tel que :  $a + b \leq c$  .

✓ Montrer que :  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} \Rightarrow (a + b - c)^3 + 27abc = 0$  .

○ **Exercice 22:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 - 3x - 3$  .

1)- Dresser le tableau de variation complet de  $f$  .

2)- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $2 < \alpha < 3$  .

3)- On pose :  $a = \frac{\sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}}}{2}$  . Montrer que  $\alpha = a + \frac{1}{a}$  .

○ **Exercice 23:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  .

1)- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $a$  dans  $[\sqrt[3]{2}; +\infty[$  .

2)- Montrer que l'équation  $f(x) \neq x$  admet une solution unique  $b$  dans  $]a; +\infty[$  .

3)- Montrer que :  $(\exists c \in ]0; a[), \sqrt[3]{c+2} \cdot f(c) = 2c - a$  .

○ **Exercice 24:**

⇒ Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = [-1; 0[$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$  .

1)- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , puis montrer que  $f$  est continue sur  $I$  .

2)- Montrer que :  $(\forall x \in ]-1; 0[), f'(x) = -\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$ , puis en déduire que  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  .

3)- Montrer que l'équation  $f(x) = x^3$  admet une solution unique  $a$  dans  $I$  et que  $\frac{-3}{4} < a < \frac{-1}{2}$  .

4)- a)- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera .

b)- Calculer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$  .

5)- Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f^{-1}(x) = f(x)$  .

Fin Du Sujet

Bon Courage et Bonne Chance