

## EXERCICES ET PROBLÈMES

Dans tous les exercices, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### EXERCICE1:

On considère les quatre points  $A, B, C$  et  $I$  de coordonnées respectives :

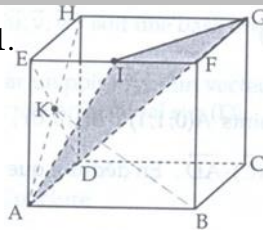
$$A(-1; 2; 1), B(1; -6; -1), C(2; 2; 2) \text{ et } I(0; 1; -1)$$

- 1) a) Calculer le produit vectoriel :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$   
 b) Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$
- 2) Soit  $(Q)$  le plan d'équation :  $x + y - 3z + 2 = 0$   
 et  $(Q')$  le plan de repère  $(O, \vec{i}, \vec{k})$ .  
 a) Pourquoi  $(Q)$  et  $(Q')$  sont-ils sécants ?  
 b) Donner une représentation paramétrique de la droite d'intersection  $(\Delta)$  des plans  $(Q)$  et  $(Q')$ .
- 3) Ecrire une équation cartésienne de la sphère  $(S)$  de centre  $I$  et de rayon 2.
- 4) On considère les points  $J$  et  $K$  de coordonnées respectives :  $J(2; 0; 0)$  et  $K(1; 0; 1)$   
 - Déterminer l'intersection de la sphère  $(S)$  et de la droite  $(JK)$ .

### EXERCICE2:

$ABCDEFCH$  est un cube de côté 1. L'espace est orienté par le repère orthonormé direct  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

$I$  est le milieu de  $[EF]$  et  $K$  est le centre du carré  $ADHE$ .



- 1) Vérifier que  $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$ . En déduire l'aire du triangle  $ICA$ .
- 2) Calculer le volume du tétraèdre  $BICA$ . En déduire la distance du point  $B$  au plan  $(ICA)$ .

### EXERCICE3:

On donne les points  $A(1,1,0)$ ,  $B(1,-1,1)$  et  $C(0,1,1)$  et soit le plan.  $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$

- 1) Calculer  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  et en déduire que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés  
 a) Montrer que :  $(ABC): 2x + y + 2z - 3 = 0$ .  
 b) Vérifier que les plans  $(P) \perp (ABC)$ .  
 c) Donner une représentation paramétrique de la droite  $(D)$  intersection des plans  $(P)$  et  $(ABC)$ .  
 d) Soit le point  $I(2,1,1)$  et  $M$  un point de  $(D)$ . Déterminer  $M$  pour que la distance  $IM$  soit minimale et en déduire  $d(I, (D))$ .
- 2) a) Montrer que les points  $I$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas coplanaires.  
 b) Calculer le volume du tétraèdre  $IABC$ .  
 c) Calculer  $d(I; (ABC))$  et en déduire l'aire du triangle  $ABC$ .
- 3) Soit l'ensemble  $(S)$  des points  $M(x,y,z)$  vérifiant :  

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + \frac{38}{9} = 0$$
 a) Montrer que  $S$  est une sphère de centre  $I$  et tangente au plan  $(ABC)$ .  
 b) Déterminer une équation cartésienne du plan  $(Q)$  tangent à la sphère  $(S)$  et strictement parallèle à  $(ABC)$ .  
 c) Montrer que le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(\Gamma)$  dont on précisera son rayon  $r$  et les coordonnées de son centre  $K$ .

**EXERCICE4:**

Considérons les points  $A(1;1;2)$  ;  $B(0;1;1)$  et le vecteur  $\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

- 1) Montrer que  $O$  ,  $A$  et  $B$  ne sont pas alignés.
- 2) Montrer que le vecteur  $\vec{N}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$ .
- 3) En déduire une équation cartésienne du plan  $(OAB)$ .
- 4) Soit le plan  $(P) : x + y - z = 0$ .
- a- Donner une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par  $A$  et perpendiculaire à  $(P)$
- b- Déterminer les points  $M$  de  $(\Delta)$  tel que  $d(M; (P)) = 1$ .
- c- Caractériser l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tel que  $d(M; (\Delta)) = \sqrt{2}$ .
- 4) a- Donner une équation cartésienne du plan médiateur  $(Q)$  du segment  $[AB]$ .
- B - Montrer que  $(Q)$  et  $(P)$  sont sécants.

**EXERCICES :**

On considère les points  $A(2,2,0)$  ;  $B(0,2,2)$  et  $C(1,0,1)$ .

- 1) Calculer les coordonnées de  $\vec{u} = \vec{CA} \wedge \vec{CB}$ .
- 2) Déterminer une équation du plan  $(ABC)$ .
- 3)  $(D)$  étant l'intersection du plan  $(P)$  et de l'axe  $(O, \vec{i})$ ,  $E$  étant l'intersection du plan  $(P)$  et de l'axe  $(O, \vec{k})$ .  
- Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\vec{DE}$  et  $\vec{AB}$ . Et Calculer  $\vec{DA} \cdot \vec{DE}$ .
- 4) Montrer que le triangle  $ABC$  est isocèle et calculer son aire.
- 5) Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle  $ABC$ .
- 6) a) Calculer  $d(I; (P))$  avec  $I(0; 2; 0)$ .  
b) Déterminer le volume du tétraèdre  $IBCA$  par deux méthodes différentes.

**EXERCICE6:**

On donne les points  $A(2,1,0)$  ;  $B(1,2,2)$  et  $C(3,3,1)$ .

- 1) a) Calculer  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ .  
b) En déduire que les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés.  
c) Montrer que  $(ABC) : x - y + z - 1 = 0$ .  
d) Calculer le volume du tétraèdre  $OABC$ .
- 2) Soit  $H$  le projeté orthogonal du point  $O$  sur le plan  $(ABC)$ . Déterminer  $OH$ .
- 3) a) Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral.  
b) Déterminer les coordonnées du point  $G$  centre de gravité du triangle  $ABC$ .
- 4) Soit  $S$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que :  
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ .

- a) Vérifier que  $(S)$  est une sphère dont on précisera les coordonnées du centre  $I$  et le rayon  $R$ .
- b) Vérifier que les points  $A, B$  et  $C$  appartiennent à  $(S)$ .
- c) En déduire l'intersection de la sphère  $(S)$  et le plan  $(ABC)$ .
- d) Donner des équations cartésiennes des plans  $(P_1)$  et  $(P_2)$  parallèles à  $(ABC)$  et tangents à  $(S)$ .

**EXERCICE7:**

On considère les points  $A(-1, -1, 1)$  ;  $B(-1, 2, -2)$  et le plan  $(P)$  dont une équation cartésienne est :  
 $x + y + z - 2 = 0$ .

- 1) Montrer que la droite  $(AB)$  est parallèle au plan  $(P)$ .
- 2) Soit  $\alpha$  un réel et  $(S_\alpha)$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tel que :  
 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2\alpha y + 2\alpha z + \alpha^2 + \alpha = 0$ .
- a- Montrer que ,pour tout réel  $\alpha$ ,  $(S_\alpha)$  est une sphère de centre  $I_\alpha$  et de rayon  $R_\alpha = \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}$ .
- b- Montrer que ,quand  $\alpha$  varie dans  $\mathbb{R}$ ,  $I_\alpha$  décrit la droite  $(AB)$ .
- 3) Etudier suivant les valeurs de  $\alpha$ , les positions relatives de  $(S_\alpha)$  et du plan  $(P)$ .
- 4) Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$  et  $I_{1-\alpha}$  le centre de la sphère  $(S_{1-\alpha})$ .  
a- Montrer que  $I$  est le milieu de  $[I_\alpha; I_{1-\alpha}]$ .  
b- En déduire que les sphères  $(S_\alpha)$  et  $(S_{1-\alpha})$  sont symétrique par rapport au point  $I$ .

**EXERCICE8:**

Soit

$$S = \{M(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0\}$$

On considère  $A(-2; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$  et  $C(0; 0; -1)$

- 1) Montrer que  $(S)$  est une sphère dont on déterminera le centre  $\Omega$  et le rayon  $R$ .
- 2) a) Calculer  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ .  
b) En déduire que :  $(ABC) : x - 2y + 2z + 2 = 0$
- 3) a) Montrer que les points  $A, B, C$  et  $\Omega$  ne sont pas coplanaires  
b) Calculer le volume du tétraèdre  $\Omega ABC$   
c) Calculer l'aire du triangle  $ABC$ , puis en déduire la distance de point  $\Omega$  au plan  $(ABC)$   
d) En déduire l'intersection de la sphère  $(S)$  et le plan  $(ABC)$  est un cercle dont on précisera le centre  $I$  et le rayon  $r$ .