PRIMITIVES - CORRECTION

Exercice n°1

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 9 \times 1 = 9x^2 - 9$.

2) Si on note g la fonction définie par $g(x) = 9x^2 - 9$, alors grâce à la question 1), on dispose d'une primitive de g en la personne de la fonction f. Un autre primitive de g serait la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) + k$, où k est une constante réelle quelconque. Ainsi $f(x) = 3x^3 - 9x + 1 + 50 = 3x^3 - 9x + 51$ est une autre primitive de g

3) Puisque $g(x) = 9x^2 - 9 = 9\left(x^2 - 1\right) = 9\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)$, on peut établir le signe de $g(x)$, donc le sens de variation de f : Pour $x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$, $g(x) > 0$ et pour $x \in \left]-1; 1\right[$, $g(x) < 0$, donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty; -1\right[$, strictement décroissante sur $\left]-1; 1\right[$, et strictement croissante sur $\left]1; +\infty\right[$.

Exercice n°2

1) La fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F\left(x\right) = 2 \times \frac{x^2}{2} + 1 \times x = x^2 + x}$

2) La fonction f définie par $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F\left(x\right) = 10 \times \frac{x^5}{5} + 6 \times \frac{x^4}{4} - 1 \times x = 2x^5 + \frac{3x^4}{2} - x}$

3) La fonction f définie par $f(x) = \left(x - 1\right)\left(x + 3\right) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F\left(x\right) = \frac{x^3}{3} + 2 \times \frac{x^2}{2} - 3 \times x = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x}$

4) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ est continue sur $\left]0; +\infty\right[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $\left]0; +\infty\right[$ par $\boxed{F\left(x\right) = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3}}$

5) La fonction f définie par $f(x) = \frac{-4}{3x^5} = -\frac{4}{3}x^{-5}$ est continue sur $\left]0; +\infty\right[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $\left]0; +\infty\right[$ par $\boxed{F\left(x\right) = -\frac{4}{3} \times \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{4}{3} \times \frac{x^{-5+1}}{-4} = \frac{x^{-4}}{3} = \frac{1}{3x^4}}$

6) La fonction f définie par $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $\left]0; +\infty\right[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $\left]0; +\infty\right[$ par $\boxed{F\left(x\right) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}}$

7) La fonction f définie par $f(x) = \sin x - 2\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F(x) = -\cos x - 2\sin x}$

Exercice n°3

f est continue sur $\left]0; +\infty\right[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\left]0; +\infty\right[$ définies par $F(x) = \frac{3x^2}{2} - x - \frac{2}{x} + k, k \in \mathbb{R}$.

On cherche k pour que $F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 1 - \frac{2}{1} + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$

La primitive F de f sur $\left]0; +\infty\right[$ qui s'annule pour x=1 est donc $\boxed{F(x) = \frac{3x^2}{2} - x - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}}$

Exercice n°4

1) f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme donc admet des primitives définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+k, k\in\mathbb{R}$. On cherche k pour que $F(1)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+k=0 \Leftrightarrow \frac{7}{12}+k=0$ $\boxed{\Leftrightarrow k=-\frac{7}{12}}$. La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(1)=0$ est donc $\boxed{F(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{7}{12}}$

2) f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives définies sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}+k, k\in\mathbb{R}}$. On cherche k pour que $F(1)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{1}-2\sqrt{1}+k=0\ 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}+k=0$ $\boxed{\Leftrightarrow k=\frac{5}{2}}$. La primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui vérifie $F(1)=1$ est donc $\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}+\frac{5}{2}}$

Exercice n°5

1) $f(x)=3(3x+1)^4$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et $f(x)=u'(x)(u(x))^4$ où $u(x)=3x+1 \Rightarrow u'(x)=3$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{(u(x))^5}{5}=\frac{(3x+1)^5}{5}}$

2) $f(x)=16(4x-1)^3$. f est définie sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=4\times4(4x-1)^3$, donc de la forme $f(x)=4u'(x)(u(x))^3$, où $u(x)=4x-1\Rightarrow u'(x)=4$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\cancel{4}\times\frac{(u(x))^4}{\cancel{4}}=(4x-1)^4}$

3) $f(x)=(2x+7)^6$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que puissance d'une fonction qui l'est, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\times2\times(2x+7)^6$, donc de la forme $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)(u(x))^6$, où $u(x)=2x+7\Rightarrow u'(x)=2$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{(u(x))^7}{7}=\frac{(2x+7)^7}{14}}$

4) $f(x)=(6x-2)(3x^2-2x+3)^5$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et de la forme $f(x)=u'(x)(u(x))^5$, où $u(x)=3x^2-2x+3\Rightarrow u'(x)=6x-2$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{(u(x))^6}{6}=\frac{(3x^2-2x+3)^6}{6}}$

5) $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$. f est définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et continue sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ en tant que produit et puissance de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$, donc de la forme $f(x)=-u'(x)\times(u(x))^4$, donc $\boxed{F(x)=-\frac{(u(x))^5}{5}=-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}$

6) $f(x)=\sin x\cos x$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x\sin x$, donc de la forme $f(x)=u'(x)u(x)$, où $u(x)=\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{(u(x))^2}{2}=\frac{(\sin x)^2}{2}}$

Exercice n°6

1) $f(x)=\dfrac{4}{(1+4x)^2}$ f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$, f est de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une primitive sur $\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{1+4x}}$

2) $f(x)=\dfrac{6}{(2x+1)^2}$ f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{3\times 2}{(2x+1)^2}$ est de la forme $f(x)=\dfrac{3\times u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une primitive sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{3}{u(x)}=-\dfrac{3}{2x+1}}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{(4x+3)^2}$ f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{3}{4};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\left]-\dfrac{3}{4};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{\frac{1}{4}\times 4}{(4x+3)^2}$ est de la forme $f(x)=\dfrac{1}{4}\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une primitive sur $\left]-\dfrac{3}{4};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{4(4x+3)}}$

4) $f(x)=\dfrac{-1}{(2-x)^2}$ f est définie et continue sur $]2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in]2;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$ ou $u(x)=2-x\Rightarrow u'(x)=-1$ donc f admet une primitive sur $]2;+\infty[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{2-x}}$

5) $f(x)=\dfrac{2}{(4-3x)^2}$ f est définie et continue sur $\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-3)}{(4-3x)^2}$ est de la forme $f(x)=-\dfrac{2}{3}\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une primitive sur $\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{2}{3(4-3x)}}$

6) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (le discriminant du trinôme x^2+x+1 est strictement négatif), et pour tout $x\in\mathbb{R}$, f est de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x)=x^2+x+1\Rightarrow u'(x)=2x+1$ donc f admet une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{x^2+x+1}}$$

7) $f(x)=\dfrac{4x-10}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2;3\}=]-\infty;2[\cup]2;3[\cup]3;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{2(2x-5)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$ donc de la forme $f(x)=\dfrac{2u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x)=x^2-5x+6\Rightarrow u'(x)=2x-5$ donc f admet une primitive sur $]3;+\infty[$ (ou n'importe lequel des trois intervalles de son ensemble de définition), définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{2}{u(x)}=-\dfrac{2}{x^2-5x+6}}$

8) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour x appartenant à l'un des intervalles $]k\pi;(k+1)\pi[$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x)=\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, elle admet une primitive sur chaque intervalle $]k\pi;(k+1)\pi[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{\sin x}}$

9) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour x appartenant à l'un des intervalles $\left]k\dfrac{\pi}{2};(k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x)=\cos x\Rightarrow u'(x)=-\sin x$, elle admet une primitive sur chaque intervalle $\left]k\dfrac{\pi}{2};(k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[$ définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{1}{\cos x}}$

<u>Exercice n°7</u>

1) Pour tout $x\neq-1$, $\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}=\dfrac{a(x+1)+b}{(x+1)^3}=\dfrac{ax+a+b}{(x+1)^3}$. Ainsi $\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}=f(x)$ si et seulement si pour tout $x\neq-1$, $ax+a+b=3x+4\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\a+b=4\Leftrightarrow b=1\end{cases}$ Ainsi, pour tout $x\neq-1$, $\boxed{f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}}$

2) *f* est continue sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions qui le sont, donc elle admet des primitives F sur $]-1;+\infty[$. Puisque la fonction $x\to\dfrac{3}{(x+1)^2}$ est de la forme $x\to\dfrac{3u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x)=x+1\Rightarrow u'(x)=1$, une de ses primitives sur $]-1;+\infty[$ est la fonction $x\to-\dfrac{3}{u(x)}=-\dfrac{3}{x+1}$. Puisque la fonction $x\to\dfrac{1}{(x+1)^3}=(x+1)^{-3}$ est de la forme $x\to u'(x)(u(x))^{-3}$, où $u(x)=x+1\Rightarrow u'(x)=1$, une de ses primitives sur $]-1;+\infty[$ est la fonction $x\to\dfrac{u(x)^{-3+1}}{-3+1}=-\dfrac{1}{2}u(x)^{-2}=-\dfrac{1}{2u(x)^2}=-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$. On déduit donc qu'une primitive de f sur $]-1;+\infty[$ est la fonction F définie sur $]-1;+\infty[$ par $F(x)=-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$

Exercice n°8

1) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$ f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=3x+2\Rightarrow u'(x)=3$, elle admet une primitive sur $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{3x+2}}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-5x}}$ f est définie et continue sur $\left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$, $f(x)=-\dfrac{1}{5}\times\dfrac{-5}{\sqrt{2-5x}}$. f étant de la forme $f(x)=-\dfrac{1}{5}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=2-5x\Rightarrow u'(x)=-5$, elle admet une primitive sur $\left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{5}\times 2\sqrt{u(x)}=-\dfrac{2}{5}\sqrt{2-5x}}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ f est définie et continue sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{\sqrt{2x-3}}$. f étant de la forme $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=2x-3\Rightarrow u'(x)=2$, elle admet une primitive sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{u(x)}=\sqrt{2x-3}}$

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (le discriminant du trinôme x^2+x+1 est strictement négatif), et pour $x\in\mathbb{R}$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=x^2+x+1\Rightarrow u'(x)=2x+1$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par $\boxed{F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{x^2+x+1}}$

5) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ f est définie et continue sur chacune des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$. f étant de la forme $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=x^2-1\Rightarrow u'(x)=2x$, elle admet une primitive sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$ définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{u(x)}=\sqrt{x^2-1}}$

6) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\mathbb{R}$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=2+\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par $\boxed{F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{2+\sin x}}$

Exercice n°9

1) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0;+\infty[$,
$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

2) Puisque $g'(x) = \frac{3}{2} f(x)$, on déduit que $f(x) = \frac{2}{3} g'(x)$. Une primitive sur $]0;+\infty[$ de f est donc la fonction définie par $\boxed{F(x) = \frac{2}{3} g(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x}}$

Exercice n°10

1) a) FAUX. $f(0,5) = 0$, mais cela n'influe par sur le signe de ses primitives

b) VRAI. Puisque f est négative sur [0 ;0,5] et positive sur $[0,5;+\infty[$, toute primitive de f est décroissante sur [0 ;0,5] et croissante sur $[0,5;+\infty[$

2) C'est la **courbe 2** qui correspond à la représentation graphique de toute primitive de f.

Exercice n°11

1) $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$. f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\boxed{F(x) = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + \ln(|x|) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \ln(x)}$ puisque $x \in]0;+\infty[$

2) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$. f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x \in]0;+\infty[$, puisque $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$,
$\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(|x|) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(x)}$ puisque $x \in]0;+\infty[$

3) $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$. f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\boxed{F(x) = 7\ln(|x|) + 5 \times 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 7\ln(x) + 10\sqrt{x} - \frac{1}{x}}$,car $x \in]0;+\infty[$

4) $f(x) = \frac{3}{3x - 4}$. f est continue sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$, et puisque $f(x) = \frac{3}{3x-4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = 3x - 4 \Rightarrow u'(x) = 3$, $\boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|3x-4|) = \ln(3x-4)}$ car $x \in \left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$. f est continue sur $]-1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]-1;+\infty[$, et puisque $f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = x + 1 \Rightarrow u'(x) = 1$,
$\boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x+1|) = \ln(x+1)}$ car $x \in]-1;+\infty[$

6) Si $x \in]-\infty;-1[$, $\boxed{F(x) = \ln(|x+1|) = \ln(-(x+1)) = \ln(-x-1)}$

7) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$. f est continue sur $]2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]2;+\infty[$, et puisque $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=x^2-4\Rightarrow u'(x)=2x$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|x^2-4|)=\ln(x^2-4)}$ car $x\in]2;+\infty[$

8) $f(x)=\dfrac{1}{3x-5}$ sur $[2;+\infty[$. f est continue sur $[2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[2;+\infty[$, et pour tout $x\in[2;+\infty[$, puisque $f(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{3x-5}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=3x-5\Rightarrow u'(x)=3$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{3}\ln(|3x-5|)=\dfrac{1}{3}\ln(3x-5)}$ car $x\in[2;+\infty[$

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, (le discriminant du trinôme x^2+2x+2 est strictement négatif) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, puisque $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=x^2+2x+2\Rightarrow u'(x)=2x+2$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(|u(x)|)=\dfrac{1}{2}\ln(|x^2+2x+2|)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)}$, puisque $x\in\mathbb{R}\Rightarrow x^2+2x+2>0$

10) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$. f est continue sur $]-1;1[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]-1;1[$, et pour tout $x\in]-1;1[$, puisque $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x)=x^2-1\Rightarrow u'(x)=2x$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(|u(x)|)=\dfrac{1}{2}\ln(|x^2-1|)=\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)}$ puisque $x\in]-1;1[\Rightarrow 1-x^2<0$

Exercice n°12

1) Pour tout $x\in[4;+\infty[$, $ax+b+\dfrac{c}{x-2}=\dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}=\dfrac{ax^2+(b-2a)x-2b+c}{x-2}$

Ainsi $ax+b+\dfrac{c}{x-2}=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b-2a=-3\\-2b+c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3+4=1\\c=-4+2=-2\end{cases}$. Pour tout $x\in[4;+\infty[$, $\boxed{f(x)=2x+1+\dfrac{-2}{x-2}}$

2) f est définie et continue sur $[4;+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[4;+\infty[$ A partir de l'écriture $f(x)=2x+1+\dfrac{-2}{x-2}$, on déduit l'expression d'une primitive F de f sur $[4;+\infty[$: $\boxed{F(x)=x^2+x-2\ln(|x-2|)=x^2+x-2\ln(x-2)}$ car $x\in[4;+\infty[\Rightarrow x-2>0$

Exercice n°13

1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$. f est définie et continue sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, et pour tout $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, puisque $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|\sin x|)=\ln(\sin x)}$, puisque $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\sin x>0$.

2) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. f est définie et continue sur $[1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[1;+\infty[$, et pour tout $x\in[1;+\infty[$, puisque $f(x)=\frac{1}{x}\times\ln x=u'(x)\times u(x)$, ou $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$, $\boxed{F(x)=\frac{(u(x))^2}{2}=\frac{(\ln(x))^2}{2}}$

3) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. f définie est continue sur $]1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]1;+\infty[$, et pour tout $x\in]1;+\infty[$, puisque $f(x)=\frac{1/x}{\ln x}=\frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|\ln(x)|)=\ln(\ln(x))}$ car $x\in]1;+\infty[\Rightarrow\ln x>0$

4) $f(x)=\tan x$. f définie est continue sur $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$, et pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$, puisque $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\cos x\Rightarrow u'(x)=-\sin x$, $\boxed{F(x)=-\ln(|u(x)|)=-\ln(|\cos x|)=-\ln(-\cos x)}$, puisque $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]\Rightarrow\cos x<0$.

<u>Exercice n°14</u>

1) $f(x)=\frac{1}{4}e^x$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\boxed{F(x)=\frac{1}{4}e^x}$.

2) $f(x)=e^{-x}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-\left(-e^{-x}\right)=-u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x)=-x\Rightarrow u'(x)=-1$, $\boxed{F(x)=e^{u(x)}=e^{-x}}$.

3) $f(x)=e^{2x+3}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\times2e^{2x+3}=\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x)=2x+3\Rightarrow u'(x)=2$, $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}e^{u(x)}=\frac{1}{2}e^{2x+3}}$.

4) $f(x)=xe^{x^2}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\times2xe^{x^2}=\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x)=x^2\Rightarrow u'(x)=2x$, $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}e^{u(x)}=e^{x^2}}$.

5) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (car $x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x+1>0$ donc $\neq0$) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ou $u(x)=e^x\Rightarrow u'(x)=e^x$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|e^x+1|)=\ln(e^x+1)}$ car $x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x+1>0$

Exercice n°15

La fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, par $F(x)=(ax+b)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

F sera une primitive de f si et seulement si pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\a+b=2\end{cases}$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc $\boxed{F(x)=(x+1)e^x}$

Exercice n°16

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3}{e^{-x}+1}=\dfrac{3\times e^x}{(e^{-x}+1)\times e^x}=\dfrac{3e^x}{e^{-x}\times e^x+1\times e^x}=\dfrac{3e^x}{1+e^x}$

2) . f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (car $x\in\mathbb{R}\Rightarrow 1+e^x>0$ donc $\neq 0$) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et en utilisant l'écriture $f(x)=\dfrac{3e^x}{e^x+1}=3\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ou $u(x)=e^x+1$, on obtient $\boxed{F(x)=3\ln\left(\left|u(x)\right|\right)+k=3\ln\left(\left|e^x+1\right|\right)+k=3\ln\left(e^x+1\right)+k}$ car $e^x+1>0$ sur $\mathbb{R}$