Exercices d'applications et de réflexions : *FONCTIONS LOGARITHMIQUES*

PROF: ATMANI NAJIB 2BAC BIOF

TD -FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Exercice1 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \to ln(x+1)$ 2) $g : x \to ln(x^2-3x+2)$

3) $h : x \to \dfrac{x}{\ln x}$ 4) $k : x \to \ln x + ln(x-1)$

5) $m : x \to ln\left(\dfrac{x-4}{x+1}\right)$

Exercice2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : 1) $ln(x-2)=0$

2) $ln(3x-1)=ln(5x-10)$ 3) $ln(2x-1)-ln(1-x)=0$

4) $ln(2x)=ln(x^2+1)$ 5) $ln(2x-6)\geq 0$

6) $ln(x-1)-ln(3x+1)<0$

Exercice3 : On pose $l\,n(2)\simeq 0,7$ et $l\,n(3)\simeq 1,1$

Calculer: $l\,n(6)$; $l\,n(4)$; $l\,n(8)$; $l\,n(72)$

$l\,n\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $l\,n\left(\dfrac{3}{2}\right)$; $l\,n(\sqrt{2})$; $l\,n(\sqrt{6})$; $l\,n(3\sqrt{2})$

$ln(12\sqrt[3]{3})$; $A=ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

$B=\dfrac{1}{4}ln81+ln\sqrt{3}-ln\dfrac{1}{27}$ et $C=ln(\sqrt{2}+1)^{2015}+ln(\sqrt{2}-1)^{2019}$

Exercice4 : On pose $\alpha = ln(a)$ et $\beta = ln(b)$
Calculer en fonction de α et β les réels suivants :

$\ln(a^2b^5)$ et $\dfrac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}$

Exercice5 : simplifier et calculer :

$A=\ln(e^2)+\ln(e^4)-\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$

$B=2\ln(\sqrt{e})+\ln(e\sqrt{e})-\dfrac{1}{3}\ln(e^9)$

Exercice6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $ln(2x-1)=\dfrac{3}{2}$ 2) $2(\ln x)^2+\ln x-6=0$

3) $3(\ln x)^2+2\ln x-1=0$ 4) $\dfrac{\ln x+3}{\ln x-1}\geq -1$

5) $lnx+ln(x-1)-l\,n2=l\,n3$

6) $ln(2x+5)+ln(x+1)\leq ln4$

7) $ln(14-x)\succ ln(10+7x-3x^2)$

Exercice7 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}3\ln x+\ln y=2\\2\ln x-\ln y=3\end{cases}$

Exercice8 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \to \dfrac{ln(x+1)}{ln(\ln x)}$ 2) $g : x \to \sqrt{1-ln(e-x)}$

3) $h : x \to \dfrac{x}{\sqrt{(ln(2x))^2-1}}$

Exercice9 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(ln^2(x)-lnx)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-lnx$ 4) $\lim\limits_{x\to0^+}ln^2(x)+lnx$

5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}+lnx\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to0^+}x^4\log x$

7) $\lim\limits_{x\to0^+}2x-x^3\ln x$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}xln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to0^+}x(ln(x))^2$ on pose : $X=\sqrt{x}$

10) $\lim_{x\to+\infty} \frac{ln\left(x^2+3x\right)}{x-1}$ 11) $\lim_{x\to0^+} x^2\left(\ln x\right)^5$

Exercice10 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction suivante :

$f\left(x\right)=\ln\left(3x^2+5\right)$

Exercice11 :calculer la dérivée des fonctions définies par :1) $f\left(x\right)=x^2-\ln x$ 2) $f\left(x\right)=x\ln x$

3) $f\left(x\right)=\ln\left(1+x^2\right)$

Exercice12 :calculer la dérivée de la fonction définie sur $I=\left]-2;+\infty\right[$ par : $f\left(x\right)=\frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{\left(x^2+1\right)^3}$

Exercice13 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f\left(x\right)=\ln\left|\ln|x|\right|$

2) $f\left(x\right)=\ln\left|\sin^2 x+3\sin x+4\right|$

Exercice14 : Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

1) $I=\mathbb{R};\ f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^4+2}$ 2) $I=\left]0;1\right[;g\left(x\right)=\frac{1}{xlnx}$

3) $I=\left]-\infty;1\right[;h\left(x\right)=\frac{1}{x-1}$ 4) $I=\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[;k\left(x\right)=\frac{\cos x}{\sin x}$

5) $M\left(x\right)=\frac{1}{x^2-1}$ (Essayer d'écrire $g\left(x\right)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$ où a et b des réels à déterminer).

6) $N\left(x\right)=\frac{x^3+2x^2-3x+2}{x-3}$

7) $I=\left]3;+\infty\right[;q\left(x\right)=\frac{1}{\left(x-2\right)\ln\left(x-2\right)}$

Exercice 15 : Considérons la fonction f définie par : $f\left(x\right)=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et Déterminer les réels a et b tels que : $\left(\forall x\in D\right);f\left(x\right)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$

2) En déduire la fonction primitive de f sur $\left]-\infty;-2\right[$ Tel que $F\left(-3\right)=\ln 2$

Exercice 16 : simplifier et calculer :

1) $\log_8 4$ 2) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}$ 3) $\log_{\sqrt{3}} 9$

4) $A=\log_2\left(\frac{1}{5}\right)+\log_2\left(10\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right)$

Exercice17 : On pose $\alpha=\log_{40}\left(100\right)$ et $\beta=\log_{16}\left(25\right)$ Calculer β en fonction α

Exercice18 : simplifier et calculer :

1) $\log_{10}100$ 2) $\log_{10}0,0001$

3) $A=\log\left(250000\right)+\log\sqrt{250}-\log\left(125\right)$

Exercice 19 :déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\left(\frac{3}{2}\right)^n\geq 10^{20}$

Exercice 20 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

1) $\log_3\left(2x\right)\times\left(\log_5\left(x\right)-1\right)=0$

2) $2\left(\log x\right)^2-19\log x-10=0$

3) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq 1$

4) $\log_{2x}\left(4x\right)+\log_{4x}\left(16x\right)=4$

Où $\log$ est le logarithme décimal

Exercice 21 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et équations suivantes :

1) $\log_3\left(7x-1\right)^2=0$ 2) $\log_3\left(5x+1\right)=2$

3) $\frac{\log_3\left(5x+1\right)}{\log_3\left(7x-1\right)^2}\leq 1$

Exercice 22:A) soit la fonction g définie par : $g\left(x\right)=x-lnx$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g et déterminer les limites aux bornes

de D_g

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g

3) en déduire que : $\forall x>0 \qquad x>lnx$

B) soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+lnx}{x-lnx};si..x\succ 0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$$

1)Montrer que $D_f=[0;+\infty[$

2)Montrer que f est continue à droite de 0

3)calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0

5) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[\quad f'(x)=\dfrac{2(1-lnx)}{(x-lnx)^2}$

6) Dresser le tableau de variation de f

7)déterminer les points d'intersections de C_f et la

Droite : $(\Delta): y=1$

8) Montrer que : C_f coupe l'axe des abscisses

en un point d'abscisse dans $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$

9) Construire la courbe C_f dans un repère

$(O;\vec{i};\vec{j})$ ($ln2\approx 0,7$, $e\approx 2,7$)

Exercice 23 : Considérons les fonctions f et g définies sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2} \text{ et } g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$$

1)a)calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$

b) montrer que : $\forall x\in]-1;+\infty[$ on a :

$$g(x)=(1+x)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{2x^3-3x^2+6x}{6(1+x)}\right)$$

et en déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

c) Etudier les variations les fonctions f et g Puis dresser les tableaux de variations de f et g

2) en déduire que $\forall x\in]0;+\infty[$:

$$x-\frac{x^2}{2}\prec\ln(1+x)\prec x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

3) calculer : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

4)monter que : $\forall x\in]0;+\infty[$:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\prec\ln(1+x)\prec x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

Exercice 24 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x-3+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2)montrer que le domaine d'étude de f est :

$D_E=]0;1[\cup]1;+\infty[$

3) Déterminer les limites aux bornes de D_E

4) Etudier les variations de f sur D_E

5) Etudier les branches infinies de (C_f) la courbe de f

6). Construire la courbe (C_f) dans D_E

Exercice 25 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\log_x(x+1)=\log_{x+1}(x)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$\log_2(x)>\log_x(2)$

Exercice 26 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2) Résoudre l'équation $f(x)=1$

3) Résoudre l'inéquation $f(x)\le 1$

4) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche de e

5) Etudier les variations de f et en déduire que f est une bijection de D_f vers un intervalle J.

6) Construire dans le même repère Cf et $C_{f^{-1}}$

Exercice 27 : Considérons la fonction g définie par : $g(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g

2. a) Montrer que la fonction g admet un prolongement par continuité en 0 noté g

b) Etudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en -1 à gauche.

4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g

5. Etudier les branches infinies de la courbe Cg.

6. Construire la courbe Cg

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien