

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$\textcircled{1} - f(x) = \frac{1}{x} \ln(x+2) \quad ; ; \quad \textcircled{2} - f(x) = \ln(x^2 - 4) \quad ; ; \quad \textcircled{3} - f(x) = \ln(2x^2 - x + 3)$$

$$\textcircled{4} - f(x) = \ln(3x+1) + \ln(x+2) \quad ; ; \quad \textcircled{5} - f(x) = \ln[(3x+1)(x+2)]$$

$$\textcircled{6} - f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) \quad ; ; \quad \textcircled{7} - f(x) = \frac{\ln(2x-1)}{\ln(x+1)} \quad ; ; \quad \textcircled{8} - f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

Exercice 2 :

① - Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$a - \ln(2x-3) + \ln(x+1) = \ln 3 \quad ; ; \quad b - \ln(2x+1) - 2\ln(1-x) = 0$$

$$c - \ln|x+2| - \ln|8x-1| = 0 \quad ; ; \quad d - (\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 - 3\ln x = 0$$

② - Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$a - \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) > 0 \quad ; ; \quad b - \ln\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) < 1$$

$$c - \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \geq 0 \quad ; ; \quad d - (\ln x)^2 - \ln x - 2 \leq 0$$

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

$$\textcircled{1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\ln x + 1}{x} \quad ; ; \quad \textcircled{2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} \quad ; ; \quad \textcircled{3} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{x}$$

$$\textcircled{4} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) \quad ; ; \quad \textcircled{5} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(1-x)}{x} \quad ; ; \quad \textcircled{6} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x+2}$$

$$\textcircled{7} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{x^2 + x + 1} \quad ; ; \quad \textcircled{8} - \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 - x \quad ; ; \quad \textcircled{9} - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot (\ln x)^2$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x(\ln x - 1)^2 & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

① - Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

② - Etudier la continuité de la fonction f à droite en 0.

③ - Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.

④ - Etudier les variations de la fonction f .

⑤ - Déterminer le point d'inflexion de la courbe (\mathcal{C}_f) .

⑥ - Déterminer les branches infinies de la courbe (\mathcal{C}_f) .

⑦ - Tracer la courbe (\mathcal{C}_f) . (on prend : $e = 2,7$ et $e^{-1} = 0,4$)

Exercice 5 :**1^{ère} partie :**

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - \ln x$

- ① - a - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
 b - Etudier les variations de la fonction g .
- ② - En déduire que : $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

2^{ème} partie :

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x \ln x & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- ① - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
- ② - a - Etudier la continuité de la fonction f à droite en 0 .
 b - Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.
- ③ - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis étudier la branche infinie de courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.
- ④ - a - Montrer que : $\forall x > 0 : f'(x) = x + g(x)$
 b - En déduire les variations de f sur D_f .
- ⑤ - a - Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une tangente à la courbe (\mathcal{C}_f) au point $A(1;1)$.
 b - Etudier les positions relatives de (\mathcal{C}_f) et la droite (Δ) .
- ⑥ - a - Calculer $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
 b - Etudier la concavité de la courbe (\mathcal{C}_f) et déterminer ce point d'inflexion.
- ⑦ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- ⑧ - a - Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 b - Montrer que f^{-1} est dérivable sur J .
 c - Calculer $(f^{-1})'(1)$.
 d - Tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3^{ème} partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

- ① - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$.
- ② - Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- ③ - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite