Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\ln|e^x-2|$.

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f .

② - Déterminer l'asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

③ - a - Montrer que : $(\forall x\in]\ln 2;+\infty[)$: $f(x)=2x+\ln\left(1-\frac{2}{e^x}\right)$.

b - Etudier la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

④ - a - Montrer que : $(\forall x\in D_f)$: $f'(x)=\frac{2(e^x-1)}{e^x-2}$.

b - Dresser le tableau de variations de f.

⑤ - Résoudre dans l'intervalle $]\ln 2;+\infty[$, l'équation : $f(x)=0$.

⑥ - Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $\ln 3$.

⑦ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(On prends $\ln(1+\sqrt{2})\approx 0,8$).

Exercice 2 :

☺ 1ère partie :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=xe^x+e^x-1$.

① - Calculer $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} h(x)$.

② - Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction h.

③ - a - Dresser le tableau de variations de h .

b - Calculer $h(0)$, puis déduire le signe de la fonction h.

☺ 2ème partie :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=xe^x-x+1$.

① - Montrer que : $g'(x)=h(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

② - a - Etudier les variations de la fonction g.

b - Calculer $g(0)$, puis déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $g(x)\succ 0$.

③ - a - Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $g(x)-e^x=(x-1)(e^x-1)$

b - Déduire que : $(\forall x\in[0;1])$: $g(x)\le e^x$.

☺ 3ème partie :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln(xe^x-x+1)$.

① - a - Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b - Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $f'(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ .puis dresser le tableau de variation de f .

② - a - Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$: $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\ln\left(xe^x-x+1\right)}{xe^x-x+1}\left(e^x-1+\dfrac{1}{x}\right)$.

b - - Calculer : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

③ - a - Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$: $f(x)=x+\ln x+\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{1}{xe^x}\right)$.

b - Etudier la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

④ - Calculer $f(1)$ puis tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

☺ 4ème partie :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases}u_0=\ln 2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$.

①- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $0\le u_n\le 1$.

②- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

③- Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 :

☺ 1ère partie :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x-x-1$.

① - Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g.

② - a - Déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$: $g(x)\succ 0$.

b - Montrer que : $(\forall x\succ 0)$: $\dfrac{e^x-1}{x}\succ 1$ et que : $(\forall x\prec 0)$: $\dfrac{e^x-1}{x}\prec 1$.

③ - a - Montrer que : $g(-x)=e^{-x}\left[1+(x-1)e^x\right]$.

b - Déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $1+(x-1)e^x\ge 0$.

☺ 2ème partie :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=x-1-\dfrac{x}{e^x-x-1}$.

① - a - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)$.

b - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto0^-}f(x)$.

② - Calculer : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$: $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

③ - a - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[f(x)-x\right]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

④ - a - Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-2;-1[$ et une solution unique β dans l'intervalle $]1;2[$.

b - Déduire que : $e^\alpha-\alpha-1=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

⑤- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(On prends $\alpha=-1,3$ et $\beta=1,6$).

☺ $3^{ème}$ partie :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

①- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 \le u_n \le 1$.

②- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

③- Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 :

☺ $1^{ère}$ partie :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -\dfrac{1}{x+1} + \ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|$.

① - a - Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g .

b - Trouver les limites de g aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_g .

② - a - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in D_g$, puis étudier les variations de la fonction g.

b - Déduire que : $(\forall x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[)$: $g(x) \succ 0$.

③ - a - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-1;0[$.

b - Déduire que le signe de g sur l'intervalle $]-1;0[$.

☺ $2^{ème}$ partie :

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x}\right|^x & ; \ x \in \mathbb{R}^* - \{1\} \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f .

② - a - Etudier la continuité de la fonction f en 0 .

b - Etudier la dérivabilité de la fonction f en 0 et interpréter le résultat géométriquement

③ - a - Etudier la continuité de la fonction f sur D_f .

b - Etudier la dérivabilité de la fonction f sur D_f .

④ - a - Calculer : $(\forall x \in D_f)$: $f'(x)$.

b - Dresser le tableau de variations de f.

⑤ - Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

⑥ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.