Prof : IDRISSI Abdessamad	Les Fonctions Exponentielles (série n°2)	$2^{ème}$ Année Bac Sc Exp

Exercice 1 :

☺ 1ère partie :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=xe^{x}+1$

① - a - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} h(x)$.

b - Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction h.

②- En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

☺ 2ème partie :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x-e^{x}+2$.

① - a - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$.

b - Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g.

②- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions réelles distinctes α et β dans $\mathbb{R}$ tel que $\alpha\succ\beta$, puis montrer que $1{,}14\prec\alpha\prec1{,}15$.

③- En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

☺ 3ème partie :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}$.

① - Calculer : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$.

②- a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b - Etudier les variations de f, puis dresser la tableau de variation.

③- a - Montrer que : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$

b - Donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

④- Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

⑤- a - Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^{x}+1}$, tel que : $u(x)=e^{x}-xe^{x}-1$.

b - Etudier les variations de u sur $\mathbb{R}$.

c - En déduire le signe de u sur $\mathbb{R}$.

d - En déduire les positions relatives de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (T).

⑥- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On prends $-1{,}85\prec\beta\prec-1{,}84$ et $-1{,}19\prec f(\beta)\prec-1{,}18$ $\dfrac{2}{e^{2}}\approx0{,}27$).

Exercice 2 :

☺ 1ère partie :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x-1+e^{-x}$.

① - Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g.

② - Dresser le tableau de variations de g .

③ - a -Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ g(x) \geq 0$

b - Déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ x + e^{-x} \geq 1$.

☺ 2ème partie :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x + e^{-x}}$.

① - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

② - Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \quad f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{xe^x}}$.

③ - a - Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b - interpréter graphiquement les résultats obtenus.

④ - a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b - Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

⑤ - a - Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

b - Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ x - f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x) + 1}$.

Puis étudier le signe de $x - f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c - En déduire les positions relatives de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (T) .

⑥ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(On prends $\dfrac{1}{1-e} \approx -0{,}6$).

☺ 3ème partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad 0 \leq u_n \leq 1$.

② - Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

③ - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

✍ Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x(e^{2x} - 1)}{e^{2x} + 1}$.

① - a - Vérifier que : $f(x) = \dfrac{x(1 - e^{-2x})}{1 + e^{-2x}}$.

b - Etudier la parité de f et interpréter les résultats graphiquement.

② - a - Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b - Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

c - En déduire les positions relatives de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (Δ) .

③ - a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b - Calculer $f'(0)$ et interpréter les résultats graphiquement.

c - Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+}):\ e^{4x}-1\geq 0$.

d - En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^{+}$, puis dresser le tableau de variations de f .

④ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 4 :

☺ 1ère partie : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x+e^{-x}$.

① - Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g.

② - a - Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}):\ g(x)\geq 1$

b - Déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}):\ 1+xe^{x}\succ 0$.

☺ 2ème partie : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\ln(1+xe^{x})$.

① - Déterminer D_f , puis calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$.

② - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu .

③ - a - Calculer $(\forall x\in D_f):\ f'(x)$.

b - Dresser le tableau de variations de f sur D_f .

④ - a - Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}_{+}^{*}):\ f(x)=x+\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{xe^{x}}\right)$.

b - Etudier la branche infinie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

⑤ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 5 :

☺ 1ère partie : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$.

① - Déterminer D_g , puis calculer $\lim\limits_{x\mapsto 1^{+}} g(x)$.

② - Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in D_g$, puis étudier les variations de la fonction g.

③ - a - Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $[e+1;e^{3}+1]$.

b - Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1;\alpha]$ et $[\alpha;+\infty[$.

☺ 2ème partie : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^{x}}$.

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f .

② - a - Calculer $(\forall x\in D_f):\ f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .

b - Montrer que : $(\forall x\in D_f):\ f(x)\leq\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

③ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 6 :

☺ 1ère partie :

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=e^{x}+2x-e^{-x}$.

① - Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.

② - Dresser le tableau variations de la fonction g.

③ - Déduire que : $(\forall x\in[0;+\infty[) :\ g(x)\succ 0$.

☺ 2ème partie :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x-\dfrac{2x}{1+e^{x}}$.

① - Déterminer D_f .

② - a - Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}) :\quad \dfrac{2x}{e^{-x}+1}=2x-\dfrac{2x}{1+e^{x}}$.

b - Etudier la parité de f.

③ - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$.

④ - a - Montrer que : $(\forall x\in D_f) :\quad f'(x)=\dfrac{g(x)e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$.

b - Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

c - Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

⑤ - a - Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

b - Etudier les positions relatives de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (Δ) .

⑥ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

☺ 3ème partie :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=\ln 2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$.

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}) :\quad u\succ 0$.

② - Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

③ - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.