

**Exercice 1:**

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{(\ln x)^3}$

7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + e^x + x}{e^x - x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x^2} - e^{3x} + x^2)$

8.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{x - 1}$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$

6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (\ln x)^3 + x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

9.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} + x + 1$ .

**Exercice 2:**

Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

1.  $a(x) = \frac{x^2 + x \ln x}{x + 1}$  en  $+\infty$ .

2.  $b(x) = \frac{x e^x + 1}{e^x + 1}$  en  $\pm\infty$

3.  $c(x) = \frac{x \ln x + \ln x}{\sqrt{x + 1}}$  en  $+\infty$ .

**Exercice 3:**

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

1.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x + \ln x}{x^2 - 2 \ln x} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2.  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x} & \text{si } x \in [-4; 4] \setminus \{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

**Exercice 4:**

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en  $x_0$  (penser à bien déterminer le domaine de définition pour commencer) et le cas échéant, préciser la valeur en  $x_0$  qui rend la fonction continue.

$a(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1}$  en  $x_0 = -\frac{1}{2}$      $b(x) = \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$  en  $x_0 = 1$      $c(x) = \frac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}$  en  $x_0 = 2$ .

**Exercice 5:**

Soit  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  continue. Montrer qu'il existe  $x_0 \in [0; 1]$  tel que  $f(x_0) = x_0$ .

**Exercice 6:**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2e^{-x} + 1}$ .

Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur une intervalle  $J$  à expliciter.

**Exercice 7:**

Montrer que l'équation  $3 - 2x = e^x$  possède une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .

Montrer que  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ . (On donne :  $e \approx 2,718$  et  $e^{1/2} \approx 1,648$ .)

**Exercice 8:**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^{++}$  par  $f(x) = x + \ln x$ .

1. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^{++}$  sur un intervalle que l'on précisera.
2. Justifier que l'équation  $x + \ln x = 2005$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0; +\infty[$  et que  $1997 \leq \alpha \leq 1998$ . (On donne :  $\ln 1997 \approx \ln 1998 \approx 7,6$ .)

**Exercice 9:**

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad 2. h(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1} & \text{si } x \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\} \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

(Rappel :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ )

**Exercice 10:**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} x \ln(x^2) - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$
2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .
3. Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0 et en donner une interprétation graphique.

**Exercice 11:**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. a) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .  
b) Montrer que  $f$  est dérivable (à droite) en 0 et que  $f'_d(0) = 0$ .
2. a) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{++}$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^{++}$ .  
b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
c) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

**Exercice 12:**

1. Soit  $a$  un réel et soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$  par  $f(x) = \frac{1}{a+x}$ .

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$  et  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}$ .

2. Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par  $g(x) = \frac{3x+2}{x^2-4}$ .

Montrer que l'on peut trouver deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$   $g(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$  et en déduire la dérivée  $n$ -ième de  $g$  pour tout entier  $n$ .

**Exercice 13:**

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur leur ensemble de définition et expliciter leurs dérivées.

$$1. f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad 2. g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad 3. h(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Exercice 14:**

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences ex et math

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^{++}$  par  $f(x) = -x^2 + 3x - \ln x$ .

1. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
2. Étudier la convexité de  $f$  et déterminer les coordonnées du ou des points d'inflexion.
3. Déterminer les coordonnées du ou des points de la courbe représentative de  $f$ ,  $\mathcal{C}_f$  présentant une tangente horizontale.
4. Tracer l'allure de  $\mathcal{C}_f$ . (On donne  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$  et  $\ln 2 \approx 0,7$ )

**Exercice 15:**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ .

1. Montrer que  $f$  est bijective. On note  $f^{-1}$  sa bijection réciproque. Préciser le domaine de définition de  $f^{-1}$ .
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 2.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f^{-1}$  au point d'abscisse  $\frac{1}{3}$ .
4. Quel est l'ensemble de dérivabilité de  $f^{-1}$ ?
5. La courbe représentative de  $f^{-1}$  admet-elle une tangente au point d'abscisse 1?
6. Dresser les tableaux de variation de  $f$  et  $f^{-1}$ .
7. Tracer sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de  $f$  et  $f^{-1}$ .

**Correction**

**Exercice 1:**

1. Par somme de limites  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x + x - 1 = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + e^{-x} = 1$  donc par quotient de limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}} = -\infty.$$

2. D'après la règle sur les limites des fractions rationnelles on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty.$

3. Effectuons le changement de variable  $X = \sqrt{x}$ . On a alors  $x^4 e^{-\sqrt{x}} = X^8 e^{-X}$ . Or lorsque  $x \rightarrow +\infty$  on a  $X \rightarrow +\infty$  et d'après les croissances comparées  $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^8 e^{-X} = 0.$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$

4.  $\frac{e^{2x}}{(\ln x)^3} = \frac{x}{(\ln x)^3} \times \frac{e^{2x}}{x}.$

D'après les croissances comparées  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(\ln x)^3} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty.$

Donc par produit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{(\ln x)^3} = +\infty.$

5.  $e^{x^2} - e^{3x} + x^2 = e^{x^2} (1 - e^{-x^2+3x} + x^2 e^{-x^2}).$

Par composition de limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+3x} = 0$  et par croissances comparées  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0.$  Donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x^2+3x} + x^2 e^{-x^2}) = 1$  et par produit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x^2} - e^{3x} + x^2) = +\infty.$

6. On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^3 = +\infty,$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

Donc par somme,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (\ln x)^3 + x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty.$

7.  $\frac{e^{2x} + e^x + x}{e^x - x} = \frac{x(e^{2x}/x + e^x/x + 1)}{x(e^x/x - 1)} = \frac{e^{2x}/x + e^x/x + 1}{e^x/x - 1}.$

Grâce aux croissances comparée  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x}/x + e^x/x + 1 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x/x - 1 = -1.$

Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + e^x + x}{e^x - x} = -1.$

8. Si on pose  $f(x) = \ln(2x^2 - 1),$  on remarque que  $\frac{\ln(2x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$

Comme  $f$  est la composée de la fonction  $\ln$  et d'un polynôme,  $f$  est dérivable en 1 donc :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1).$  Or  $f'(x) = \frac{4x}{2x^2 - 1}$  donc  $f'(1) = 4.$

On a donc  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{x - 1} = 4.$

9.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x - 1} + x + 1 &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x - 1} + (x + 1)) (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - (x + 1))}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} - (x + 1)} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 1 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} - (x + 1)} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} - (x + 1)} \end{aligned}$$



Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} - (x + 1) = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} + x + 1 = 0$ . 2ème BAC Sciences ex et math

### Exercice 2:

$$1. - \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 + (\ln x)/x)}{x(1 + 1/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + (\ln x)/x}{1 + 1/x} = +\infty \text{ car d'après les croissances comparées } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + (\ln x)/x}{1 + 1/x} = 1$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x - x}{1 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x(1 - 1/\ln x)}{x(1/x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \frac{1 - 1/\ln x}{1 + 1/x} = +\infty.$$

Donc la courbe représentative de  $a$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = x$ .

$$2. - \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x(1 + e^{-x}/x)}{e^x(1 + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + e^{-x}/x}{1 + e^{-x}} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} b(x) = 1 \text{ car d'après les croissances comparées } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-x}/x}{1 + e^{-x}} = 1$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{1/x - 1}{1 + 1/e^x} = 0, \text{ grâce aux croissances comparées.}$$

Donc la courbe représentative de  $b$  admet en  $+\infty$  asymptote d'équation  $y = x$  et en  $-\infty$  une asymptote d'équation  $y = 1$ .

$$3. - \lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x(1 + 1/x)}{\sqrt{x} \sqrt{1 + 1/x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln x \frac{1 + 1/x}{\sqrt{1 + 1/x}} = +\infty.$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \frac{1 + 1/x}{\sqrt{1 + 1/x}} = 0 \text{ car d'après les croissances comparées } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Donc la courbe représentative de  $c$  admet une branche parabolique de direction l'axe  $(Ox)$ .

### Exercice 3:

1. - Il faut ici commencer par vérifier que  $f$  est bien définie c'est-à-dire qu'il nous faut vérifier que  $x^2 - 2 \ln x$  ne s'annule pas sur  $]0; +\infty[$ .

$$\text{Soit } h(x) = x^2 - 2 \ln x. \text{ } h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^{++} \text{ et } h'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2 \frac{x^2 - 1}{x}.$$

Donc  $h$  est décroissante sur  $]0; 1]$  et croissante sur  $[1; +\infty[$ .  $h$  atteint donc son minimum en 1 et comme  $h(1) = 1$  on a bien  $h(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ .

- Les fonctions  $x \rightarrow x$ ,  $x \rightarrow x^2$  et  $x \rightarrow \ln x$  sont continues sur  $]0; +\infty[$  donc les fonctions  $x \rightarrow x + \ln x$  et  $x \rightarrow x^2 - 2 \ln x$  sont continues sur  $]0; +\infty[$ . Comme de plus  $x^2 - 2 \ln x$  ne s'annule pas sur cet intervalle,  $f$  est continue par quotient de fonctions continues sur  $]0; +\infty[$ .

- En 0 on a  $f(0) = -\frac{1}{2}$ .

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x(x/\ln x + 1)}{\ln x(x^2/\ln x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x/\ln x + 1}{x^2/\ln x - 2} = -\frac{1}{2}$$

On a donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$  ce qui signifie que  $f$  est aussi continue en 0.

$f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

2. -  $g$  est définie sur  $[-4; 4]$ .

- Les fonctions  $x \rightarrow x$ ,  $x \rightarrow \sqrt{4+x}$  et  $x \rightarrow \sqrt{4-x}$  sont continues sur  $[-4; 4] \setminus \{0\}$  donc les fonctions  $x \rightarrow x$  et  $x \rightarrow \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}$  sont continues sur  $[-4; 4] \setminus \{0\}$ . Comme de plus  $x$  ne s'annule pas sur cet ensemble,  $g$  est continue par quotient de fonctions continues sur  $[-4; 4] \setminus \{0\}$ .

- En 0 on a  $g(0) = \frac{1}{2}$ .

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x})(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}$$

On a donc  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$  ce qui signifie que  $g$  est aussi continue en 0.

$g$  est donc continue sur  $[-4; 4]$ .

### Exercice 4:

-  $\mathcal{D}_a = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$  et on voit facilement que  $a$  est continue sur  $\mathcal{D}_a$ .

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{(2x+1)(x-1)}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -1/2} x-1 = -\frac{3}{2}$$

Donc  $a$  est prolongeable par continuité en  $-\frac{1}{2}$  en posant  $a(-1/2) = -\frac{3}{2}$ .

- Grâce à une division euclidienne on a  $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2 - 1)$ . Donc on a  $\mathcal{D}_a = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  et  $b$  est bien continue sur  $\mathcal{D}_b$ .

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow x_0} b(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1} = \pm\infty$$

Donc  $b$  n'est pas prolongeable par continuité en 1.

- On a  $\mathcal{D}_c = [0; 2[ \cup ]2; +\infty[$  et  $c$  est bien continue sur  $\mathcal{D}_c$ . De plus :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} c(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)(\sqrt{2x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-4)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(\sqrt{x+7}+3)}{\sqrt{2x}+2} = 3 \end{aligned}$$

Donc  $c$  est prolongeable par continuité en 2 en posant  $c(2) = 3$ .

### Exercice 5:

On pose  $g(x) = f(x) - x$ . On cherche donc à savoir s'il existe  $x_0$  tel que  $g(x_0) = 0$ .

Par différence de fonctions continues,  $g$  est continue sur  $[0; 1]$ .

De plus  $g(0) = f(0) \geq 0$  et  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$  car on sait que  $f(1) \in [0; 1]$ .

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe bien  $x_0 \in [0; 1]$  tel que  $g(x_0) = 0$ .

Il existe bien  $x_0 \in [0; 1]$  tels que  $f(x_0) = x_0$ .

### Exercice 6:

- Les fonctions  $x \rightarrow e^x - e^{-x}$  et  $x \rightarrow 2e^{-x} + 1$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et comme  $2e^{-x} + 1$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  (exponentielle positive) par quotient de fonctions continues,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

-  $f$  est aussi dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \frac{4 + e^x + e^{-x}}{(2e^{-x} + 1)^2} > 0$ .

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  réalise donc une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $f(\mathbb{R}) = ]\lim_{-\infty} f; \lim_{+\infty} f[$ .

De plus  $\lim_{-\infty} f = -\frac{1}{2}$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ .

$f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ .

### Exercice 7:

- On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x + 2x - 3$ .
  - $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .
  - Les fonctions  $x \rightarrow e^x$  et  $x \rightarrow 2x - 3$  sont strictement croissantes sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- $f$  réalise donc une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $f(\mathbb{R}) = ]\lim_{-\infty} f; \lim_{+\infty} f[ = ]-\infty; +\infty[$ .
- Comme  $0 \in f(\mathbb{R})$ , 0 admet un unique antécédent  $\alpha$  par  $f$ .
- Cela signifie qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = -2x + 3$ .
- De plus  $f(1/2) = e^{1/2} + 1 - 3 = e^{1/2} - 2 < 0$  et  $f(1) = e - 1 > 0$ . On a donc

$$\begin{aligned} f(1/2) &\leq 0 \leq f(1) \\ \Leftrightarrow f(1/2) &\leq f(\alpha) \leq f(1) \\ \Leftrightarrow f^{-1}(f(1/2)) &\leq f^{-1}(f(\alpha)) \leq f^{-1}(f(1)) \quad \text{car } f^{-1} \text{ est strictement croissante} \\ \Leftrightarrow 1/2 &\leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

### Exercice 8:

- $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  comme somme de fonctions continues sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
- Les fonctions  $x \rightarrow x$  et  $x \rightarrow \ln x$  sont strictement croissantes sur  $\mathbb{R}^{+*}$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

$f$  réalise donc une bijection de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $f(\mathbb{R}^{+*}) = ]\lim_{0^+} f; \lim_{+\infty} f[ = ]-\infty; +\infty[ = \mathbb{R}$ .

- On cherche ici à résoudre l'équation  $f(x) = 2005$ .
  - Comme  $2005 \in \mathbb{R} = f(\mathbb{R}^{+*})$ , 2005 admet un unique antécédent  $\alpha$  par  $f$ .

Cela signifie qu'il existe un unique réel  $\alpha > 0$  tel que  $f(\alpha) = 2005 \Leftrightarrow \alpha + \ln(\alpha) = 2005$ .

  - De plus  $f(1997) = 1997 + \ln 1997 < 2005$  et  $f(1998) = 1998 + \ln 1998 > 2005$ . On a donc

$$\begin{aligned} f(1997) &\leq 2005 \leq f(1998) \\ \Leftrightarrow f(1997) &\leq f(\alpha) \leq f(1998) \\ \Leftrightarrow f^{-1}(f(1997)) &\leq f^{-1}(f(\alpha)) \leq f^{-1}(f(1998)) \quad \text{car } f^{-1} \text{ est strictement croissante} \\ \Leftrightarrow 1997 &\leq \alpha \leq 1998 \end{aligned}$$

### Exercice 9:

- $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  car  $1 - e^{-2x}$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$ .
- Les fonctions  $x \rightarrow x^2$ ,  $x \rightarrow e^{-x}$  et  $x \rightarrow e^{-2x}$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}^*$  donc les fonctions  $x \rightarrow x^2 e^{-x}$  et  $x \rightarrow 1 - e^{-2x}$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}^*$ . Comme de plus  $1 - e^{-2x}$  ne s'annule pas sur cet ensemble,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  par quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^*$ .
- En 0 on a  $f(0) = 0$ . Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^{2x} - 1} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

On a donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  qui est finie donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = \frac{1}{2}$

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- $h$  est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  car  $x - 1$  ne s'annule pas sur  $]0; +\infty[ \setminus \{1\}$ .
- On remarque que  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1 \neq h(0)$  car  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$   
Donc  $h$  n'est pas continue en 1 donc ne peut pas être dérivable en 1.

- Les fonctions  $x \rightarrow x$  et  $x \rightarrow \ln x$  sont dérivables sur  $]0; +\infty[\setminus\{1\}$  donc les fonctions  $x \rightarrow x \ln x$  et  $x \rightarrow x - 1$  sont dérivables sur  $]0; +\infty[\setminus\{1\}$ . Comme de plus  $x - 1$  ne s'annule pas sur cet ensemble,  $h$  est dérivables sur  $]0; +\infty[\setminus\{1\}$  par quotient de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[\setminus\{1\}$ .

$h$  est donc dérivable uniquement sur  $]0; +\infty[\setminus\{1\}$ .

### Exercice 10:

- Les fonctions  $x \rightarrow x$  et  $x \rightarrow \ln(x^2)$  sont continues sur  $\mathbb{R}^*$  donc, par produit et somme,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .  
– On a  $f(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \ln |x| - 2x = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0$ .  
Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$  ce qui signifie que  $f$  est continue en 0.

$f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

- Les fonctions  $x \rightarrow x$  et  $x \rightarrow \ln(x^2)$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}^*$  donc, par produit et somme,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .
- On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2) - 2 = -\infty$ .  
Donc  $f$  n'est pas dérivable en 0 mais comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$  on peut dire que la courbe représentative de  $f$  admet en 0 une tangente verticale.

### Exercice 11:

- a) – Les fonctions  $x \rightarrow x + 1$  et  $x \rightarrow e^{-1/x}$  sont continues sur  $\mathbb{R}^{+*}$  donc, par produit,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .  
– On a  $f(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1)e^{-1/x} = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ .  
Donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$  ce qui signifie que  $f$  est continue en 0.

$f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) \times \frac{1}{x} e^{-1/x} = 0$  car d'après les croissances comparées  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-1/x} = 0$ .

$f$  est donc dérivable à droite en 0 et  $f'_d(0) = 0$ .

- Les fonctions  $x \rightarrow x + 1$  et  $x \rightarrow e^{-1/x}$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}^{+*}$  donc, par produit,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . De plus  $f'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-1/x}$ .
- On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1/x} = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- Pour  $x > 0$ ,  $f'(x) > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . On a donc le tableau de variation suivant :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$



**Exercice 12:**

1. Comme  $x + a$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$  donc pour tout entier  $n$ ,  $f$  est bien de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ .

Montrons par récurrence que la propriété  $\mathcal{P}(n) : f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x + 1)^{n+1}}$  est vraie pour tout entier  $n$ .

- Pour  $n = 0$  :

D'une part  $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x + 1}$ .

D'autre part  $\frac{(-1)^0 0!}{(x + 1)^{0+1}} = \frac{1}{x + 1}$ .

Donc  $\mathcal{P}(0)$  est bien vraie.

- Soit  $n$  un entier fixé. Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. On a alors :

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n n! \times \frac{-(n + 1)}{(x + a)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} (n + 1)!}{(x + a)^{n+2}}$$

Donc  $\mathcal{P}(n + 1)$  est alors vraie.

On a donc montré que pour tout entier  $n$ ,  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x + a)^{n+1}}$ .

2. On a  $g(x) = \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x + 2}$ .

Donc pour tout entier  $n$ , on a

$$g^{(n)}(x) = 2 \left( \frac{1}{x - 2} \right)^{(n)} + \left( \frac{1}{x + 2} \right)^{(n)} = \frac{2(-1)^n n!}{(x - 2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x + 2)^{n+1}}$$

**Exercice 13:**

1. - La fonction  $x \rightarrow x + 1$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  et la fonction  $x \rightarrow e^x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty; 0[$ .

Donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

- On a de plus  $\lim_{0^+} f = 1 = f(0) = \lim_{0^-} f$  donc  $f$  est continue en 0.

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- Pour tout  $x > 0$  on a  $f'(x) = 1$  et pour tout  $x < 0$ ,  $f'(x) = e^x$ .

Donc  $\lim_{0^+} f' = 1 = \lim_{0^-} f'$

D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$   $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. Les fonctions  $x \rightarrow e^x - 1$  et  $x \rightarrow e^x + 1$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $e^x + 1$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . Par quotient de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $g$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a de plus  $g'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ .

3. - Les fonctions  $x \rightarrow x$  et  $x \rightarrow e^{-3/|x|}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  donc par produit  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

- On a de plus  $\lim_{0^+} h = 0 = h(0) = \lim_{0^-} h$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-3/|x|} = 0$ . Donc  $h$  est continue en 0.

$h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- Pour tout  $x > 0$  on a  $h'(x) = \left(1 + \frac{3}{x}\right) e^{-3/x}$  et pour tout  $x < 0$ ,  $h'(x) = \left(1 - \frac{3}{x}\right) e^{3/x}$ .

Donc, grâce aux croissances comparées,  $\lim_{0^+} h' = 0 = \lim_{0^-} h'$