EXAMEN N° 7

TABLE DES MATIERES

01

L'espace $(\mathscr{E})$ étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$; on considère :

- Les points $A(3,-1,2)$ et $B(-1,3,-4)$ .et $\Omega(1,1,-1)$.
- le vecteur $\vec{n}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.
- Le plan (P) passant par A et $\vec{n}$ est un vecteur normal à (P) .
- La droite (Δ) passant par le point Ω est orthogonale à (P) .

01.

a. Calculer : $\overrightarrow{A\Omega}\wedge\overrightarrow{B\Omega}$.

b. Les points A et B et Ω sont alignés ?

c. Calculer : l'aire du triangle $AB\Omega$.

d. Donner : une équation cartésienne du plan $AB\Omega$.

e. Donner : une équation cartésienne du plan (P) .

f. Calculer la distance d du point Ω au plan (P) .

02. ..

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

b. Donner un système de deux équations cartésiennes de la droite (Δ) .

03. Déterminer les coordonnées du point H l'intersection de la droite (Δ) et le plan (P) .

04. Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie la relation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=8$

a. Montrer que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2-17$.

b. Montrer que : l'ensemble (S) est une sphère de centre Ω et préciser son rayon R_S.

c. Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle ; déterminer son rayon et son centre .

05. On considère la droite (D) définie par le système des équations suivantes : $x=2$ et $z=-2$

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) .

b. Calculer la distance de Ω à la droite (D)

c. Montrer que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points à déterminer leurs coordonnées .

02

01. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées , z_1 étant la solution de partie imaginaire positive .

02. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2 puis donner l'écriture exponentielle de z_1 et de z_2 .

03. Résoudre l'équation differentielle suivante : $y'' - 2\sqrt{3}y' + 4y = 0$.

04. Le plan complexe (P) étant rapporté au repére orthonormé direct $\left(0, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectivement $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$.

- On considère : la rotation R de centre O (origine du repère) tel que : $R(A) = B$.

a. Déterminer un argument de $k = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
b. Déterminer l'angle de la rotation R .
c. Déterminer l'écriture complexe de la rotation R .

05. on considère les points C et D tel que leurs affixes respectivement sont $c = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ et $d = \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)i$.

a. Donner l'écriture exponentielle de c .
b. Vérifier que : le point D est l'image du point C par la rotation R.
c. On déduit l'écriture trigonométrie du nombre complexe d.

03

On dispose une urne U contient neuf jetons indiscernables au toucher:
- Trois jetons blancs numérotés 2 ; 2 ; 1.
- Deux jetons jaunes numérotés 1 ; 1.
- Quatre jetons noirs numérotées 1 ; 1 ; 1 ; 2.

I. Partie N° 1

01.
- On tire au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.
- On considère les deux événements suivants :
  A « Les jetons tirés ont le même numéro »
  B « Les trois jetons tirés de couleurs différents »

a. Calculer $p(A)$ et $p(B)$ probabilité des événements A et B .
b. Montrer que : $p(A \cap B) = \frac{1}{14}$.
c. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?
d. Donner la probabilité de l'événement : C « Les jetons tirés ont le même numéro sachant que Les trois jetons tirés sont de couleurs différents ».

II. Partie N° 2

02.
- On tire successivement et sans remise trois jetons de l'urne U .
- On considère la variable aléatoire X définie par « à chaque éventualité (le résultat du tirage) on lui associe la somme des numéros des jetons tirés ».

a. Vérifier que : $X(\Omega)=\{3,4,5,6\}$ (ensemble des valeurs prises par X) .

b. Montrer que : $p(X=5)=\dfrac{3}{14}$.

c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X puis l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .

III. Partie N° 3

On répète l'expérience précédente (de la 2ième partie) six fois et à chaque fois on remet les jetons tirés dans l'urne U avant de répéter l'expérience .

01. Calculer la probabilité de l'événement K « l'événement $(X=5)$ se réalise exactement deux fois lorsqu'on répète l'expérience six fois »

02. On considère la variable aléatoire Y définie par « le nombre de fois l'événement $(X=5)$ est réalisé lorsqu'on répète l'expérience précédent (de la 2ième partie) six fois »

a. Quelle loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y ? on précise ses paramètres.

b. Donner l'ensemble $Y(\Omega)$ (ensemble des valeurs de Y) .

c. Donner $p(Y=k)$ avec $k\in X(\Omega)$.

d. Calculer : l'espérance mathématique $E(Y)$; la variance $V(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$.

04

I. Partie N° 1 :

On considère l'équation différentielle suivante : $(E): y'-y=-2$.

01. Résoudre l'équation (E) .

02. Déterminer la fonction k qui vérifie l'équation (E) et $k(0)=1$.

03. Vérifie que : la fonction $g(x)=x+2-e^{x}$ vérifie l'équation $(E_1): y'-y=-1-x$ et sans faire les calculs de $g'(x)$.

II. Partie N° 2 :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x+2-e^{x}$.

01. ..

a. Calculer et déterminer le signe de : $g(0)$ et $g(1)$ et $g(-1)$ et $g(2)$.

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c. Calculer g' la fonction dérivée de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

d. Etudier le signe de g' sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

02. Montrer que : l'équation $x\in\mathbb{R} : g(x)=0$ admet deux solutions α et β tels que $-2<\alpha<-1$ et $1<\alpha<2$.

03. En déduit le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

III. Partie N° 3 :

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=xe^{x}+1$.

01.

a. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}$ et $h(0)=1$.

02.

a. Montrer que : $h'(x)=(x+1)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Donner le signe de h' sur $\mathbb{R}$; puis dresser le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$.

c. En déduit que : $\forall x\in[0;+\infty[$; $h(x)\geq 1$ et $\forall x\in]-\infty;0]$; $0<h(x)<1$

IV. Partie N°4 :

- On considère la fonction h définie par $f(x)=\ln(h(x))-x=\ln(xe^x+1)-x$.
- (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité de mesure 2 cm .

01. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

02.

a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Vérifier que : pour tout x de $]0,+\infty[$ on a $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{xe^x}\right)$. on déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

03.

a. Montrer que : f ' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$ est $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{h(x)}$.

b. Etudier le signe de f ' de la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$; donner le tableau de variations de f .

04.

a. Montrer que : f " la fonction dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$ est $f''(x)=\dfrac{e^x\times g(x)}{(h(x))^2}$.

b. Etudier le signe de f " puis la concavité de (C_f) sur $\mathbb{R}$ et on précise les points d'inflexions de la courbe (C_f) .

05.

a. Démontrer que : la courbe (C_f) admet une asymptote oblique la droite (Δ) au voisinage de $-\infty$, on détermine son équation cartésienne .

b. Etudier le signe de $f(x)+x$ sur $\mathbb{R}$ .on déduit la position relative de la courbe (C_f) et droite (Δ)

c. Construire la courbe (C_f) de f et la droite (Δ) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité de mesure 2 cm . (sur l'annexe voir page 5) . On admet que : $\forall x>0$; $f(x)<x$ on donne que $f(\alpha)\approx 1{,}5$ et $f(\beta)\approx 0{,}4$.

06. Soit k la restriction de f sur l'intervalle $I=]-\infty,0]$.

a. Montrer que la restriction k admet une fonction réciproque k^{-1} définie sur l'intervalle J on le détermine .

b. Dresser le tableau de variations de k^{-1} .

c. Construire la courbe $\left(C_{k^{-1}}\right)$ de la fonction réciproque k^{-1} dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

d. Montrer que : $k(-1)=\ln(e-1)$; puis montrer que k^{-1} est dérivable au point $y_0=\ln(e-1)$ et calculer $\left(k^{-1}\right)'\left(\ln(e-1)\right)$.

V. Partie N° 5 :

01. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

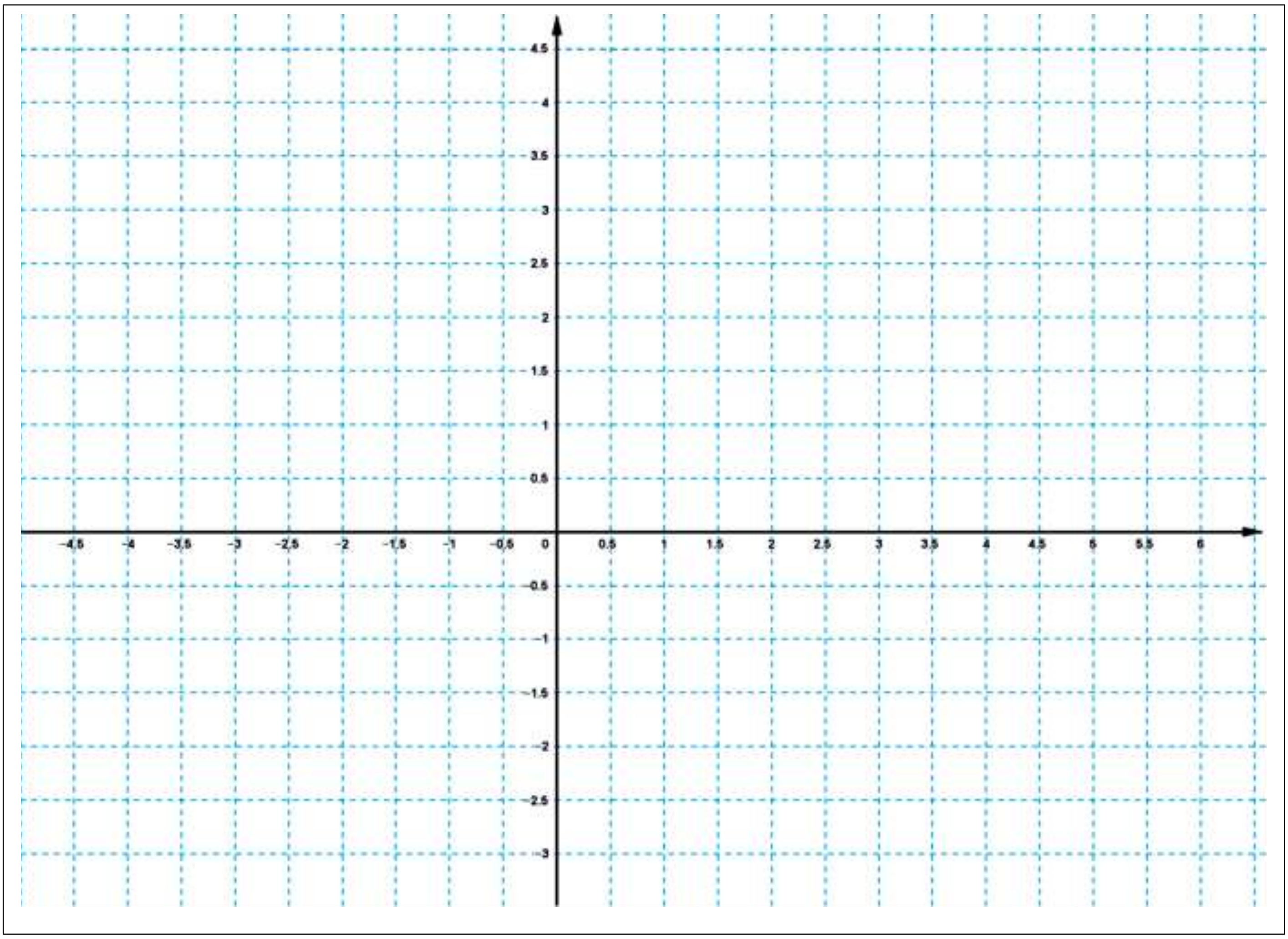
a. Montrer que $f([0,3])\subset[0,3]$.

b. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\le u_n\le 3$.

c. Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

d. On déduit que (u_n) est une suite convergente .

e. Déterminer la limite de la suite (u_n) .



e. Montrer que la restriction k admet une fonction réciproque k^{-1} définie sur l'intervalle J on le détermine .

f. Dresser le tableau de variations de k^{-1} .

g. Construire la courbe $\left(C_{k^{-1}}\right)$ de la fonction réciproque k^{-1} dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

h. Montrer que : $k\left(-1\right)=\ln\left(e-1\right)$; puis montrer que k^{-1} est dérivable au point $y_0=\ln\left(e-1\right)$ et calculer $\left(k^{-1}\right)'\left(\ln\left(e-1\right)\right)$.

VI. Partie N° 5 :

02. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=f\left(u_n\right) \end{cases}$.

f. Montrer que $f\left(\left[0,3\right]\right)\subset\left[0,3\right]$.

g. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\le u_n\le 3$.

h. Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante .

i. On déduit que $\left(u_n\right)$ est une suite convergente .

j. Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)$.