Table des matières

01

01. Résoudre l'équation différentielle suivante : (E_1) : $\begin{cases} y'=\frac{2}{x}-1+4x \\ y(1)=-7 \end{cases}$.

02. Résoudre l'équation différentielle suivante : (E_2) : $\begin{cases} 2y'+14y=5 \\ y(0)=1 \end{cases}$.

03. Résoudre l'équation différentielle suivante : (E_2) : $\begin{cases} y''+y'-2y=0 \\ y(0)=0\ ;\ y'(0)=-3 \end{cases}$.

02

Dans l'espace $(\mathcal{E})$ est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère :

- La droite (D) passant par le point A dont le vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.
- Les deux points $A(3,1,2)$ et $B(2,1,0)$.

01. Déterminer les cordonnés du point C tel que $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$.

02. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) .

03. Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par A et orthogonale à la droite (D) .

04. Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}$ puis déduis la distance du point B à la droite (D) .

05. Calculer : la surface du triangle ABC.

06. Soit la sphère (S) de centre B et tangente à la droite (D) ; le point H la projection de B sur le plan (P).

- a. Déterminer l'équation cartésienne du sphère (S) .
- b. Déterminer les cordonnés du point H .
- c. Déterminer l'intersection de (S) et (P) .

03

01. ..

a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4z+7=0$.
b. Résoudre l'équation differentielle suivante : $y''-4y'+7y=0$.

02. On considère le polynome suivant : $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$ dont z est un complexe .

a. Calculer : $P(-1)$.

b. Déterminer a et b de $\mathbb{R}$ tel que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a : $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$.

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $P(z)=0$.

03. Dans le plan complexe (P) rapporté a un repére orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$; unité de mesure est 2 cm .

a. Donner le module et l'argument le nombre complexe suivant : $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b. Donner la forme algébrique de z^6 .

c. On considère les points A et B et C d'affixes respectivement $a=-1$ et $b=2+i\sqrt{3}$ et $c=2-i\sqrt{3}$. Calculer la distance AB .

d. Donner la forme trigonométrique puis la forme exponentielle du nombre complexe : $\frac{b-a}{c-a}$.

e. On déduit la nature du triangle ABC .

04. On considère la rotation R de centre le point A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a. Graphiquement déterminer l'image du point C par la rotation R .
b. Prouver ce résultat en utilisant les quetions précédentes .
c. Donner l'écriture complexe de la rotation R ; puis vérifie une autre fois de l'image de C par R .
d. Verifier que $c=-2+9i$ et $d=1+2i$ les affixes des points C et D tel que : $R(A)=C$ et $R(B)=D$.

e. Montrer que : $(AD)\perp(BC)$ et $AD=BC$.

05. ..Soit (C) l'ensemble des points M du plan complexe (P) d'affixe $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ tel que : $x^2+y^2-4x-2\sqrt{3}y-5=0$

a. Montrer que (C) est un cercle on précise l'affixe de son centre et son rayon .

b. Montrer que : $M_{(z)}\in(C)\Leftrightarrow x^2+y^2-10x-4y+25=0$.

c. Soit (C') l'image de (C) par la rotation R ; déterminer la nature de (C') .

d. Montrer que les points A et C appartiennent à (C') .

04

Un sac contient huit boules indiscernables au touche dont :

- Cinq boules blanches numérotées : 0 ; 1 ; 2 ; 2 3
- trois boules noires numérotées : 0 ; 1 ; 2 .
- On tire au hasard et simultanément 3 boules du sac .

01. On considère les événements suivants :

- A « on obtient seulement deux boules blanches »
- B « la somme des nombres des trois boules tirées est 6 »

a. Montrer que : $p(A)=\frac{18}{35}$ et $p(B)=\frac{1}{35}$.

b. Calculer : $p(A\cap B)$.

c. Est-ce que les événements A et B sont indépendants .

02. On considère la variable aléatoire X « qui associe à chaque tirage de trois boules le nombre des boules blanches tirées ».

a. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ (ensemble des valeurs de X) .

b. Montrer que : $p(X=2)=\frac{3}{10}$ et $p(X=3)=\frac{3}{10}$.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

d. Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

03. On répète l'expérience précédent cinq fois tel que chaque fois on remet les trois boules tirées au sac avant de répéter l'expérience une autre fois .

- On considère la variable aléatoire Y définie par « le nombre de fois l'événement A est réalisé lorsqu'on répète l'expérience précédent cinq fois »

a. Comment on appelle la variable aléatoire Y et on précise ses paramètres .

b. Donner l'ensemble $Y(\Omega)$ (ensemble des valeurs de Y) .

c. Donner $p(Y=k)$ avec $k\in X(\Omega)$.

d. Calculer : l'espérance mathématique $E(Y)$; la variance $V(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$.

05

PARTIE 1 :

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-\ln(1+x^2)$.

01. ..

a. Vérifier que : $f(x)=x-2\ln|x|-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

b. Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

c. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x$ donner une interprétation géométrique des résultats obtenus .

d. Etudier la branche infinie de f au voisinage de $-\infty$.

e. Etudier le signe de $f(x)-x$ sur $\mathbb{R}$.

02. ..

f. Calculer la fonction dérivée de f et vérifie que $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

g. Donner le tableau de variation de g .

h. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_0 = 0$.

03. ..

a. Vérifier que la fonction dérivée seconde de f est : $f''(x) = 2\dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$.

b. Etudier le signe f'' puis donner la concavité de (C_f) et précisé les points d'inflexions de la courbe .

c. Construire la courbe (C_f) de f et la tangente (T) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité de mesure 1 cm. (sur l'annexe 2 voir page 4) .

04. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty,1]$

a. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J on le détermine .

b. Construire la courbe $(C_{g^{-1}})$ de la fonction réciproque g^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c. Calculer $g(0)$; puis montrer que g^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(g^{-1})'(0)$.

PARTIE 2 :

01. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n^2) \ ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a. Montrer que $f(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > 0$.

c. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

d. On déduit que (u_n) est une suite convergente .

e. Déterminer la limite de la suite (u_n).