Exercice 1 :

1) a - Résoudre dans IR : $x^2 - 5x + 6 = 0$

b – Résoudre dans IR l'équation suivante :

$$e^{2x} - 5e^{x} + 6 = 0$$

c - Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation suivante :

$$\ln^2 x - 5\ln x + 6 = 0$$

2) Résoudre dans IR^2 le système: $\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ \dfrac{e^x}{e^y} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$

Exercice 1 :

I - Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2z + 26 = 0$

II - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et Ω d'affixes respectives $a = 1+5i$ et $b = 1-5i$ et $c = \dfrac{7}{2}$

1) Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la transformation h de définie par l'expression complexe : $z' = \dfrac{-3}{5}z + \dfrac{56}{10}$

a – Montrer que h est une homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{-3}{5}$

b - Montrer que l'affixe du point D l'image du point B par l'homothétie h est : $d = 5+3i$

2) a – Montrer que $\dfrac{d-a}{c-b} = \dfrac{-4}{5}i$

b – Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD})$ en déduire que $[AD]$ est une hauteur du triangle ABC

3) Montrer que l'ensemble M(z) des points du plan complexe qui vérifient $|\bar{z} - 1 + 5i| = 10$ est le cercle (C) de centre A qui passe par le point B.

Exercice 2 :

On pose $I = \int_0^{\ln 2} \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}dx$ et $J = \int_0^{\ln 2} e^x \ln(e^x + 1)dx$

1) a - Vérifier que : $e^x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 1} = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$

b - Donner la fonction dérivée de : $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}\right)$

2) a – Calculer l'intégrale I.

b – A l'aide d'une intégration par parties calculer J.

Problème :

Partie I :

1) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = -x + 1 + x\ln x$

a- Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau des variations de la fonction g.

b – En déduire que $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0;+\infty[$ et que 1 est la seule solution de l'équation g(x) = 0

2) On pose $h(x) = 1 + 2x\ln x \quad \forall x \in]0;+\infty[$

a- Calculer $h'(x)$ et dresser le tableau des variations de la fonction h.

b – En déduire que $h(x) > 0 \quad \forall x \in]0;+\infty[$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x(\ln x - 1) + 2\sqrt{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que f est continue à droite en 0.

b – Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ (on peut poser $t = \sqrt{x}$) et interpréter les résultats géométriquement.

1) a – Calculer: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b - Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter les résultats géométriquement.

3) a – Montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}h(\sqrt{x}) \quad \forall x > 0$

b – En déduire que f est croissante sur $[0;+\infty[$ et dresser le tableau des variations de la fonction f.

c) Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à (C_f) au point d'abscisse 1.

4) a – Montrer que $f(x) - x = 2\sqrt{x}g(\sqrt{x}) \quad \forall x > 0$

b- En déduire que (C_f) est au-dessus de (Δ) sur $[0;+\infty[$

5) a – Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b - Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$

6) Tracer la droite (Δ) ,la courbe (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

Partie III :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = \frac{1}{2}$$

1) Montrer que : $0 < U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer $\lim U_n$