## Exercice 1 :

On considère la suite $(U_n)$ définie par :

$$U_{n+1}=\frac{6-U_n}{4-U_n}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \text{et}\quad U_0=0$$

1) Montrer que : $U_n<2\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) a - Montrer que :

$$U_{n+1}-U_n=\frac{(U_n-3)(U_n-2)}{4-U_n}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

b - En déduire la monotonie de la suite $(U_n)$ et que $(U_n)$ est convergente.

3) On considère la suite $(V_n)$ définie par :

$$V_n=\frac{2U_n-6}{U_n-2}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

a – Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique de raison 2.

b – Exprimer $V_n$ en fonction de n.

c – En déduire que $U_n=\dfrac{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

d – Calculer $\lim U_n$

## Exercice 2 :

1) Calculer $I=\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ et $J=\int_0^1 xe^{x^2-1}dx$

2) a – Vérifier que $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}\quad \forall x\in[1,2]$

b – Calculer l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$

c – En utilisant une intégration par parties calculer :

$$K=\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$$

## Exercice 3 :

I - Résoudre dans C l'équation : $z^2-6z+12=0$

II - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et $\Omega$ d'affixes respectives $a=3+i\sqrt{3}$ et $b=3-\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})$ et $\omega=4$

1) Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe **a**.

2) Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par l'homothétie h de centre $\Omega$ et de rapport $(1+\sqrt{3})$.

a – Montrer que : $z'=(1+\sqrt{3})z-4\sqrt{3}$

b – En déduire que B est l'image du point A par l'homothétie h.

3) Montrer que l'affixe du point C l'image du point A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est :

$c=-\sqrt{3}+3i$

4) Vérifier que : $b=a+c$ en déduire que OABC est un carré.

5) Montrer que $|b|=2\sqrt{6}$ et $\arg(b)\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

En déduire que $b^6$ est un nombre imaginaire pur.

## Problème :

### Partie I :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=x-1+e^{2x}$

1) a) Calculer: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

b) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau des variations

2) Montrer que $g(x)\le 0\quad \forall x\in]-\infty;0]$ et

$g(x)\ge 0\quad \forall x\in[0;+\infty[$ (remarquer que g(0) = 0)

### Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^2-2x+e^{2x}$

$(C_f)$ est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm)

1) a - Calculer: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b - Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

et interpréter les résultats géométriquement.

2) a – Montrer que $f'(x)=2g(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que y = 1 est l'équation de la tangente à $(C_f)$ au point d'abscisse 0.

d – En déduire que $f(x)\ge 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

3) Tracer la courbe $(C_f)$.

### Partie III :

On considère la suite $(U_n)$ définie par :

$$U_{n+1}=U_n^2+e^{2U_n}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \text{et}\quad U_0=1$$

1) Montrer que : $U_n\ge 1\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) a – Montrer que $U_{n+1}\ge 2U_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

(utiliser Partie II 2) – d )

b – Montrer que la suite $(U_n)$ est croissante.

3) a – Montrer que : $U_n\ge 2^n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

b – Calculer $\lim U_n$