



## Exercice N° 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . on considère les points  $A(1, -1, -1)$  et  $B(0, -2, 1)$  et  $C(1, -2, 0)$ .

1. ..

**a.** Montrer que :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  . ..... (0,75)

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0-1 \\ -2+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1-1 \\ -2+1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

D'où :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (-1+2)\vec{i} - (-1+0)\vec{j} + (1+0)\vec{k} .$$

**Conclusion :**  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

**b.** En déduire que  $x + y + z + 1 = 0$  est l'équation cartésienne du plan  $(ABC)$  . ..... (0,5)

**1<sup>ère</sup> méthode :**

• On a le vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  ou encore  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1, 1, 1)$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$  .

• D'où :

$$M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \times (x-1) + 1 \times (y+1) + 1 \times (z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + y + 1 + z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z + 1 = 0$$

**Conclusion :**  $x + y + z + 1 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  .

**2<sup>ème</sup> méthode :**

• Le vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1, 1, 1)$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$  donc équation du plan  $(ABC)$  est de la forme :  $x + y + z + d = 0$  .

• Le point  $A(1, -1, -1)$  appartient au plan  $(ABC)$  donc :  $1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times (-1) + d = 0$   
d'où  $d = 1$ .

**Conclusion :**  $x + y + z + 1 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  .



**2.** on considère la sphère (S) d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$  .

on vérifie que la sphère (S) a pour centre le point  $\Omega(2, -1, 1)$  et pour rayon  $R = \sqrt{5}$  ..... (0,75)

$$\begin{aligned} \text{on a : } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0 &\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} - 4 + \underbrace{y^2 + 2y + 1}_{(y+1)^2} - 1 + \underbrace{z^2 - 2z + 1}_{(z-1)^2} - 1 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 1 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 5 = \sqrt{5}^2 \end{aligned}$$

La dernière écriture représente l'équation cartésienne de la sphère de centre  $\Omega(2, -1, 1)$  et de rayon  $R = \sqrt{5}$  .

**Conclusion :** la sphère (S) a pour centre le point  $\Omega(2, -1, 1)$  et pour rayon  $R = \sqrt{5}$  .

**3.** ..

**a.** Calculer  $d(\Omega, (ABC))$  ..... (0,5)

$$\text{On a : } d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 - 1 + 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} . \text{ ( on remplace } x + y + z + 1 \text{ (sans écrire } = 0 \text{ )}$$

par les coordonnées de  $\Omega(2, -1, 1)$  )

**Conclusion :**  $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3}$

**b.** En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle ( $\Gamma$ ) ..... (0,5)

Puisque le rayon du cercle est  $R = \sqrt{5}$  et on a ;  $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3} < \sqrt{5}$  d'où l'intersection du plan (ABC) et la sphère (S) sera un cercle ( $\Gamma$ ) .

**Conclusion :** le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle ( $\Gamma$ ) .

**1.** Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation  $z^2 - 2z + 4 = 0$  ..... (0,75)

On calcule : le discriminant  $\Delta$  :

$$\text{On a : } \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0 .$$

D'où l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 + i\sqrt{-\Delta}}{2 \times 1} = \frac{2 + i\sqrt{12}}{2} = \frac{2 + i2\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = 1 - i\sqrt{3}$$

**Conclusion :** ensemble des solutions de l'équation est :  $S = \{1 + i\sqrt{3} ; 1 - i\sqrt{3}\}$

**2.** Dans le plan complexe (P) étant rapporté à un repère orthonormé direct  $(0, \vec{u}, \vec{v})$  , On considère les

points A , B , C et D d'affixes respectives  $a = 1 - i\sqrt{3}$  ,  $b = 2 + 2i$  , ,  $c = \sqrt{3} + i$  et  $d = -2 + 2\sqrt{3}$  .

**a.** Vérifier que :  $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$  ..... (0,5)

On a :



- $c-d = \sqrt{3} + i - (-2 + 2\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 2 + i.$
- $a-d = 1 - i\sqrt{3} - (-2 + 2\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} = -\sqrt{3} \left( \underbrace{-\sqrt{3} + 2 + i}_{c-d} \right) = -\sqrt{3}(c-d)$
- donc  $a-d = -\sqrt{3}(c-d)$

**Conclusion :**  $a-d = -\sqrt{3}(c-d)$

**b.** En déduire que : les points A , C et D sont alignés . ..... ( 0,25 )

On a :

- Le vecteur  $\overrightarrow{DA}$  a pour affixe  $z_{\overrightarrow{DA}} = a-d.$
- Le vecteur  $\overrightarrow{DC}$  a pour affixe  $z_{\overrightarrow{DC}} = c-d$

$$a-d = -\sqrt{3}(c-d) \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{DA}} = -\sqrt{3}z_{\overrightarrow{DC}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = -\sqrt{3}\overrightarrow{DC}$$

Par suite les deux vecteurs  $\overrightarrow{DA}$  et  $\overrightarrow{DC}$  sont colinéaires donc les points A et C et D sont alignés .

**Conclusion :** les points A et C et D sont alignés .

**3.** Soit  $z$  l'affixe du point  $M$  et  $z'$  l'affixe du point  $M'$  ; l'image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre le point  $O$  et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$  .

Vérifier que :  $z' = \frac{1}{2}az$  . ..... ( 0,5 )

L'écriture complexe de la rotation  $R$  est de la forme :  $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$  avec  $\omega$  est l'affixe du centre de la rotation et  $\theta$  est l'angle de la rotation .

D'où :  $z' - 0 = (z - 0)e^{i\frac{-\pi}{3}}$

( avec  $\omega = 0$  est l'affixe du point  $O$  centre de la rotation et  $\theta = \frac{-\pi}{3}$  est l'angle de la rotation  $R$  ) .

$$\begin{aligned} z' &= z \times \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= z \times \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= z \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= z \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2}az \quad ; \quad (\text{car : } 1 - i\sqrt{3} = a) \end{aligned}$$

**D'où :** L'écriture complexe de la rotation  $R$  est  $z' = \frac{1}{2}az$

**Conclusion :**  $z' = \frac{1}{2}az$

4. Soit le point H d'affixe h est l'image du point B par la rotation R, et le point P d'affixe p tel que  $p = a - c$ .

a. Vérifier que :  $h = ip$ . ..... (0,5)

On a :

$$\begin{aligned} R(B) = H &\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}ab \\ &\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(2 + 2i) \\ &\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3})(1 + i) \\ &\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3}) + i(1 - i\sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow h = i \underbrace{(-i - \sqrt{3})}_{-c} + i \underbrace{(1 - i\sqrt{3})}_a \\ &\Leftrightarrow h = i(a - c) \\ &\Leftrightarrow h = ip \end{aligned}$$

D'où :  $h = ip$

Conclusion :  $h = ip$

b. Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O ..... (0,5)

On a :

$$\begin{aligned} \frac{h-0}{p-0} = \frac{ip}{p} = i &\Rightarrow \begin{cases} \frac{|h-0|}{|p-0|} = |i| \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \arg\left(\frac{h-0}{p-0}\right) [2\pi] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{OH}{OP} = 1 \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \arg(i) [2\pi] ; \left(\frac{h}{p} = i\right) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} OH = OP \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on a :

- $OH = OP$  d'où le triangle OHP est isocèle en O .
- $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  d'où le triangle OHP est rectangle en O .

Conclusion : le triangle OHP est rectangle et isocèle en O .

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher:

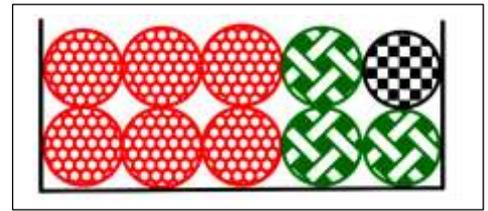
- Trois boules vertes .



- Six boules rouges .
- Une boule noire .

On considère l'expérience suivante : On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne . Soient les événements suivants :

- ❖ A « les trois boules tirées sont vertes » .
- ❖ B « les trois boules tirées sont de même couleur » .
- ❖ C « au moins deux boules de même couleur »



1. Montrer que :  $p(A) = \frac{1}{120}$  et  $p(B) = \frac{7}{40}$  . .....(2)

- Montrons que :  $p(A) = \frac{1}{120}$

➤ On calcule  $\text{card}\Omega$  : (ou encore le nombre des tirages possibles) .

Tirer simultanément 3 boules parmi 10 boules présente une combinaison de 3 parmi 10 ,, d'où le nombre des tirages possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 10 ce nombre est :

$$\text{card}\Omega = C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120 .$$

donc :  $\text{card}\Omega = C_{10}^3 = 120$  .

➤ On calcule  $\text{card}A$  : ( le nombre des tirages qui réalisent l'événement A ) .

l'événement A « les 3 boules tirées sont vertes »

Tirées 3 boules vertes simultanément parmi 3 boules vertes de l'urne ceci présente une combinaison de 3 parmi 3 .

Donc le nombre des tirages qui réalisent l'événement A est  $C_3^3 = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3} = 1$  ( Remarque  $C_n^n = 1$  )

donc :  $\text{card}A = C_3^3 = 1$  .

Conclusion :  $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$  .

- Montrons que :  $p(B) = \frac{7}{40}$  .

➤ On calcule  $\text{card}B$  : ( le nombre des tirages qui réalisent l'événement B ) .

l'événement B « les 3 boules tirées sont de même couleur »

ou encore l'événement B est B « les 3 boules tirées sont vertes ou les boules sont rouges » .

✚ les 3 boules tirées simultanément sont vertes parmi 3 boules vertes de l'urne on a :  $\text{card}A = C_3^3 = 1$

✚ les 3 boules tirées simultanément sont rouges parmi 6 boules rouges de l'urne on a :

$$C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 .$$

✚ D'où :  $\text{card}B = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$

donc :  $p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3 + C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{21}{120} = \frac{7 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 40} = \frac{7}{40}$  .

Conclusion :  $p(B) = \frac{7}{40}$



$$D'où : p(A) = \frac{1}{120} \text{ et } p(B) = \frac{7}{40}$$

2. Calculer  $p(C)$  . .....(1)

➤ **On calcule cardC** : ( le nombre des tirages qui réalisent l'événement C ) .

**1<sup>ère</sup> méthode :**

C « au moins deux boules de même couleur »

**ou encore** C « exactement deux boules de même couleur ou exactement trois boules de même couleur »

L'événement contraire de l'événement C est l'événement  $\bar{C}$

$\bar{C}$  « les trois boules de couleurs différentes »

$$\text{Donc : } \text{card}\bar{C} = C_3^1 \times C_6^1 \times C_1^1 = 3 \times 6 \times 1 = 18.$$

$$\text{Par suite } \text{card}C = \text{card}\Omega - \text{card}\bar{C} = 120 - 18 = 102.$$

$$\text{Donc : } p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{card}\Omega - \text{card}\bar{C}}{C_{10}^3} = \frac{120 - 18}{120} = \frac{102}{120} = \frac{\cancel{6} \times 17}{\cancel{6} \times 20} = \frac{17}{20}$$

$$\text{Conclusion : } p(C) = \frac{17}{20}$$

**2<sup>ème</sup> méthode :**

**ou encore :**

C « exactement deux boules de même couleur ou exactement trois boules de même couleur »

▪ On obtient exactement trois boules de même couleur donc l'événement B d'où :

$$\text{card}B = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$$

▪ On obtient exactement deux boules de même couleur ou encore « ( deux boules **vertes** et une boule parmi les deux autres couleurs ) ou ( deux boules **rouges** et une boule parmi les deux autres couleurs ) »

✓ Tirer deux boules **vertes** et une boule parmi les deux autres couleur ( on a 7 boules )  
le nombre des tirages est :  $C_3^2 \times C_7^1$ .

✓ Tirer deux boules **rouges** et une boule parmi les deux autres couleurs ( on a 4 boules )  
le nombre des tirages est :  $C_6^2 \times C_4^1$ .

✓ D'où : le nombre des tirages tel que : On obtient exactement deux boules de même couleur est :  $C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1 = 3 \times 7 + 15 \times 4 = 81$

$$\text{Donc : } \text{card}C = C_3^3 + C_6^3 + C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1 = 1 + 20 + 3 \times 7 + 15 \times 4 = 102.$$

Par suite on obtient que :

$$p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3 + C_6^3 + C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1 + 20 + 3 \times 7 + 15 \times 4}{120} = \frac{102}{120} = \frac{\cancel{6} \times 17}{\cancel{6} \times 20} = \frac{17}{20}$$

$$\text{Conclusion : } p(C) = \frac{17}{20}$$

**Problème**

**Première Partie :**



Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$   
 et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 1 cm).

**1.** Calculer :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  puis interpréter le résultat géométriquement. .... (0,5)

• On calcule :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ .

On a :

$$\equiv \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\equiv \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\ln x = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln x)^2 = +\infty \end{cases}$$

$$\equiv \text{D'où : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty.$$

**Conclusion :**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ .

• On interprète le résultat géométriquement :

Puisque on a  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  donc la courbe  $(C)$  admet une asymptote verticale ou encore c'est la droite d'équation  $x = 0$  ou encore l'axe des ordonnées .

**2.** ..

**a.** Vérifier que : pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  :  $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$ . .... (0,25)

On a :

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln x \times \ln x - \ln x \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \ln x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

**Conclusion :** pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  :  $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$ .

**b.** En déduire que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . .... (0,5)

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x = +\infty$ .

D'où :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x \right) = +\infty$ .



**Conclusion :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

c. Montrer que : pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  :  $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$  puis en déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ .

..... (0,5)

▮ Montrons que :  $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$ .

On a :

$$\begin{aligned} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \frac{\left( \ln(\sqrt{x}^2) \right)^2}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} ; (\ln x^r = r \ln x ; r \in \mathbb{Q}) \\ &= \frac{4 (\ln \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} \\ &= 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$ .

▮ En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ .

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 \left( \frac{\ln t}{t} \right)^2 ; (t = \sqrt{x} ; x \rightarrow +\infty ; t \rightarrow +\infty) \\ &= 0 ; \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \right) \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ .

d. Montrer que  $(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction asymptotique la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$ . ..... (0,75)

On a :



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} = 1.$$

$$\left( \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \text{ d'après la question précédente} \right)$$

$$\text{D'où : } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x - x \right) = +\infty \quad (\text{car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty)$$

$$\text{donc } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$$

$$\text{Par suite : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ et } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty.$$

**Conclusion :**  $(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction asymptotique la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$ .

**3.** ..

**a.** Montrer que : pour tout  $x$  de  $]0,1]$  :  $(x-1) + \ln x \leq 0$

et que pour tout  $x$  de  $[1, +\infty[$  :  $(x-1) + \ln x \geq 0$ . ..... (0,5)

**.. Montrons que : pour tout  $x$  de  $]0,1]$  :  $(x-1) + \ln x \leq 0$  .**

$$\text{On a : } 0 < x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < x-1 \leq 0 \\ \ln x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-1) + \ln x \leq 0 \quad (\text{car la somme de deux nombres négatifs est un nombre négatif})$$

**Donc :** pour tout  $x$  de  $]0,1]$  :  $(x-1) + \ln x \leq 0$

**.. Montrons pour tout  $x$  de  $[1, +\infty[$  :  $(x-1) + \ln x \geq 0$ .**

$$\text{On a : } x \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-1) + \ln x \geq 0 \quad (\text{car la somme de deux nombres positifs est un nombre positif})$$

**Donc :** pour tout  $x$  de  $[1, +\infty[$  :  $(x-1) + \ln x \geq 0$ .

**Conclusion :**  $\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de } ]0,1] : (x-1) + \ln x \leq 0 \\ \text{pour tout } x \text{ de } [1, +\infty[ : (x-1) + \ln x \geq 0 \end{cases}$

**Remarque :** on peut utiliser le tableau des signes de  $x-1$  et  $\ln x$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  .

**b.** Montrer que : pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$  ..... (1)

On a :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left( x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right)' \\
 &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times 2 (\ln x)' \ln x \\
 &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \times \ln x \\
 &= \frac{x - 1 + \ln x}{x}
 \end{aligned}$$

**Conclusion :** pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[ : f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$ .

**c.** Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  . ..... (0,5)

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$ $+\infty$
		$\frac{3}{2}$	

**4.** ..

**a.** Montrer que :  $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  . ..... (0,5)

On a :

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= (f'(x))' \\
 &= \left( \frac{x - 1 + \ln x}{x} \right)' \\
 &= \frac{\left( 1 + \frac{1}{x} \right) \times x - (x - 1 + \ln x) \times 1}{x^2} \\
 &= \frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x} + 1 - \ln x}{x^2} \\
 &= \frac{2 - \ln x}{x^2}
 \end{aligned}$$

**Conclusion :** pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  on a :  $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$ .

**b.** En déduire que  $(C_f)$  admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées . ..... (0,5)

- Pour déterminer les points d'inflexions d'une fonction on étudie le signe de la fonction  $f''$  dérivée seconde de  $f$  .

Le signe de  $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$  est le signe de  $2 - \ln x$  car  $x^2 > 0$  avec  $x \in ]0, +\infty[$ .

On a :  $2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2$   
 $\Leftrightarrow x \leq e^2$

D'où le signe de  $f''$  est donné par le tableau suivant :

x	0	$e^2$	$+\infty$
$f''(x)$		+	0 -

**Conséquence :** la fonction  $f''$  dérivée seconde de  $f$  s'annule en  $x_0 = e^2$  et change de signe au voisinage de  $x_0 = e^2$ .

**Conclusion :** le point  $I(e^2, f(e^2)) = I\left(e^2, \frac{2e^2 + 1}{2}\right)$  est un point d'inflexion à la courbe  $(C)$  de  $f$ .

5. ..

**a.** Montrer que : pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  :  $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$  et déduire la position relative de  $(C_f)$  et  $(\Delta)$  . ..... (0,5)

Montrons que : pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  :  $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ .

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 &= \frac{1}{2}((\ln x)^2 - 2\ln x + 1) \\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}}_{f(x)} + x - x \\ &= f(x) - x \end{aligned}$$

**Conclusion :** pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  :  $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ .

En déduire la position relative de  $(C_f)$  et  $(\Delta)$  .

Pour cela on étudier le signe de :  $f(x) - x$  ou encore  $\frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$  qui a un signe positif sur  $]0, +\infty[$  mais s'annule si  $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$   
 $\Leftrightarrow e = 1$

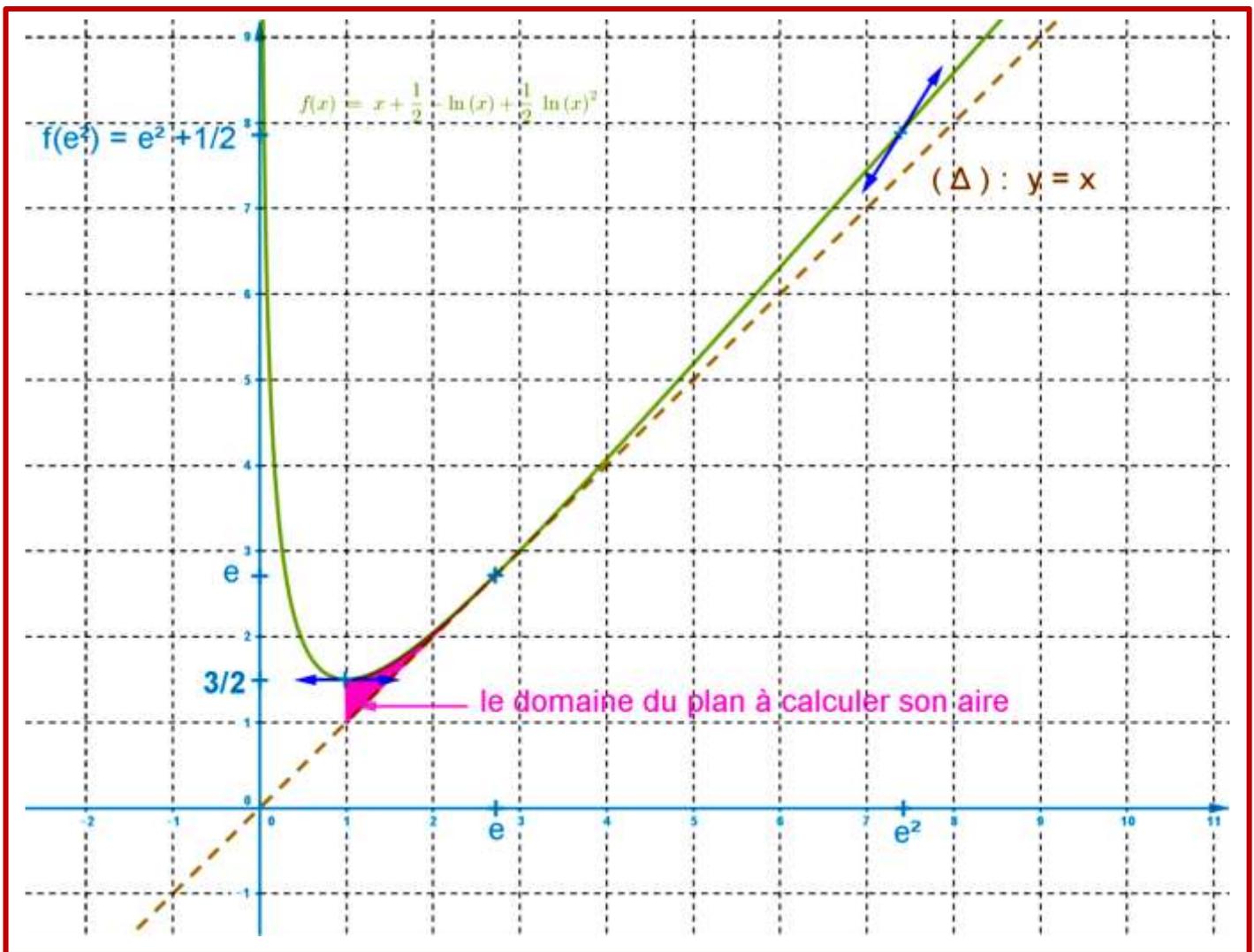
**Conclusion :**

- La courbe  $(C)$  de  $f$  est située au dessus de la droite  $(\Delta)$  sur chacune des intervalles  $]0, e[$  et  $]e, +\infty[$
- La courbe  $(C)$  de  $f$  coupe la droite  $(\Delta)$  au point  $A(e, f(e)) = A(e, e)$ .

- Remarque : on peut résumer la position relative de  $(C_f)$  et  $(\Delta)$  par le tableau suivant :

x	0	e	$+\infty$
$f(x) - x$ et $(\ln x - 1)^2$		+	0
		+	+
position relative de $(C_f)$ et $(\Delta)$		(C) est au dessus de $(\Delta)$	(C) est au dessus de $(\Delta)$
		↓ (C) et $(\Delta)$ se coupent au point d' abscisse $x = e$	

- b. Construire  $(\Delta)$  et  $(C_f)$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . ..... (1)



6. ..

- a. Montrer que :  $H : x \mapsto x \ln x - x$  est une primitive de la fonction  $h : x \mapsto \ln x$  sur  $]0, +\infty[$ . (0,5)

Pour cela on montre que :  $H'(x) = h(x)$ .

On a :  $H'(x) = (x \ln x - x)'$

$$= (x)' \ln x + (x)(\ln x)' - (x)'$$

$$= 1 \times \ln x + \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} - 1$$

$$= \ln x + 1 - 1$$

$$= \ln x = h(x)$$

D'où :  $H'(x) = h(x)$ .

**Conclusion :** la fonction  $H : x \mapsto x \ln x - x$  est une primitive de la fonction  $h : x \mapsto \ln x$  sur  $]0, +\infty[$ .

**b.** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$  ..... (0,75)

$$\text{On écrit : } \int_1^e (\ln x)^2 dx = \int_1^e (\ln x) \times (\ln x) dx$$

On utilise la disposition suivante :

$$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \ln x \quad v(x) = x \ln x - x$$

Par suite on obtient:

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \overbrace{\left[ \ln x \times (x \ln x - x) \right]_1^e}^{(1)} - \overbrace{\int_1^e \frac{1}{x} \times (x \ln x - x) dx}^{(2)} \\ &= (\ln e \times (e \ln e - e)) - (\ln 1 \times (1 \ln 1 - 1)) - \int_1^e (\ln x - 1) dx \\ &= (1(e \times 1 - e) - 0) - \int_1^e \ln x dx + \int_1^e 1 dx \\ &= 0 - [x \ln x - x]_1^e + [x]_1^e \quad ; \quad (H'(x) = h(x)) \\ &= -((e \times 1 - e) - (1 \times 0 - 1)) + (e - 1) \\ &= 0 - 1 + e - 1 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

**c.** Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine plan limité par  $(C_f)$  et  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ . ..... (0,5)

La surface demandée à calculer en  $\text{cm}^2$  est :

$$\begin{aligned} \left( \int_1^e |f(x) - x| dx \right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| &= \left( \int_1^e (f(x) - x) dx \right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ cm}^2 \quad (\text{car } (C) \text{ est au dessus de } (\Delta) \text{ sur } [1, e]) \\ &= \left( \int_1^e \left( \cancel{x} + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \cancel{x} \right) dx \right) \times 1 \times 1 \text{ cm}^2 \\ &= \int_1^e \frac{1}{2} dx - \int_1^e \ln x dx + \frac{1}{2} \underbrace{\int_1^e (\ln x)^2 dx}_{e-2} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [x]_1^e - [x \ln x - x]_1^e + \frac{1}{2} (e-2) \quad \text{cm}^2 \\
&= \frac{1}{2} (e-1) - \underbrace{((e \times 1 - e) - (1 \times 0 - 1))}_{-1} + \frac{1}{2} (e-2) \quad \text{cm}^2 \\
&= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{e}{2} - 1 = e - \frac{5}{2} \quad \text{cm}^2
\end{aligned}$$

**Conclusion :** la surface demandée est  $\frac{2e-5}{2} \text{ cm}^2$ .

### Deuxième Partie :

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

1. ..

a. Montrer par récurrence que :  $1 \leq u_n \leq e$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  ..... (0,5)

On note la relation :  $1 \leq u_n \leq e$  par (1)

- On vérifie que la relation (1) est vraie pour  $n = 0$ .  
on a :  $1 \leq u_0 = 1 \leq e$  d'où la relation (1) est vraie pour  $n = 0$ .
- On suppose que la relation (1) est vraie pour  $n$ . ou encore  $1 \leq u_n \leq e$  est vraie (hypothèse de récurrence).
- On montre que : la relation (1) est vraie pour  $n+1$ . (ou encore à démontrer que  $1 \leq u_{n+1} \leq e$  d'après hypothèse de récurrence on a :  $1 \leq u_n \leq e$  ou encore  $u_n \in [1, e]$ )

Donc :  $1 \leq u_n \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$  (car la fonction est croissante sur  $[1, e]$  et  $u_n \in [1, e]$ ).

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e \quad (f(e) = e \text{ puisque } (C) \text{ coupe } (\Delta) \text{ au point}$$

$$A(e, f(e)) = A(e, e)$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e \quad \text{et } f(1) = \frac{3}{2} \text{ voir tableau de variations de } f)$$

D'où : la relation (1) est vraie pour  $n+1$ .

**Conclusion :**  $1 \leq u_n \leq e$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

b. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante ..... (0,5)

Pour cela on montre que :  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  (ou encore  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ )

Soit  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $x = u_n$  et on a  $u_n \in [1, e]$  car  $1 \leq u_n \leq e$

D'après le résultat de la question 1) 5) a -) on a (C) est au dessus de  $(\Delta)$  sur l'intervalle  $[1, e]$

En déduire que :  $f(x) \geq x$  pour tout  $x$  de  $[1, e]$ .

D'où :  $x \in [1, e] \Rightarrow f(x) \geq x$

$$\Rightarrow f(u_n) \geq u_n \quad ; \quad (u_n = x \text{ et } 1 \leq u_n \leq e)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n \quad ; \quad (u_{n+1} = f(u_n))$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$$

Donc :  $u_{n+1} \geq u_n$

**Conclusion :** la suite  $(u_n)$  est croissante .

**Remarque :** on peut utiliser une démonstration par récurrence ( on montre que pour tout n de  $\mathbb{N}$   $u_{n+1} \geq u_n$  ).

c. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente . ..... ( 0,5 )

On a :

- la suite  $(u_n)$  est croissante .
- la suite  $(u_n)$  est majorée ( puisque  $1 \leq u_n \leq e$  ) .
- d'après une propriété la suite  $(u_n)$  est convergente .( tel que sa limite sera notée par  $\ell$  avec  $\ell \in \mathbb{R}$  ) .

**Conclusion :** la suite  $(u_n)$  est convergente .

2. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  . ..... ( 0,75 )

- la suite  $(u_n)$  est de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$  .
- la fonction f est continue sur  $I = [1, e]$  et  $f(I) \subset I$

( car  $f(I) = [f(1), f(e)] = \left[ \frac{3}{2}, e \right] \subset I = [1, e]$  ( car f est continue et croissante sur  $I = [1, e]$  et

$f(e) = e$  et  $f(1) = \frac{3}{2}$  ) ).

- On a :  $u_0 = 1 \in [1, e]$  .
- la suite  $(u_n)$  est convergente vers  $\ell$  avec  $\ell \in \mathbb{R}$  .

donc  $\ell$  est solution de l'équation :  $x \in I = [1, e]$  ;  $f(x) = x$  ( d'après une propriété )

pour résoudre l'équation  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[1, e]$  on étudier l'intersection de la courbe (C) et la droite  $(\Delta)$  sur  $[1, e]$  .

d'après ce qui a précédé (C) coupe  $(\Delta)$  au point  $A(e, f(e)) = A(e, e)$

d'où la solution de l'équation précédente est :  $x = e \in [1, e]$  donc  $\ell = e$

**Conclusion :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$