

**Exercice 1 : (2,5 pts)**

1) a - Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

b - Résoudre dans  $]0; +\infty[$  l'équation suivante :

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln 2x$$

2) Résoudre dans  $]0; +\infty[$  l'inéquation suivante :

$$\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$$

**Exercice 2 : (3 pts)**

On considère la suite  $(U_n)$  définie par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{5 + 8U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) Montrer que :  $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) On considère la suite  $(V_n)$  définie par :

$$V_n = \frac{1}{U_n} + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a - Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison 5 puis écrire  $V_n$  en fonction de n.

b - Montrer que  $U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  et

en déduire  $\lim U_n$

**Exercice 3 : (5 pts)**

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z^2 - 18Z + 82 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points A et B d'affixes

respectives  $a = 9 + i$ ,  $b = 9 - i$ ,  $c = 11 - i$

a - Montrer que :  $\frac{c-b}{a-b} = -i$  puis en déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

b - Ecrire  $4(1 - i)$  sous forme trigonométrique

c - Montrer que :  $(c - a)(c - b) = 4(1 - i)$

puis en déduire que  $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

d - Soit z l'affixe de point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation de centre B et

d'angle  $\frac{3\pi}{2}$ . Montrer que  $z' = -iz + 10 + 8i$  puis

vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est  $9 - 3i$

**Problème : (9,5 pts)**

**Partie I :**

On considère la fonction g définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = (1 - x)e^x - 1$$

1) a - Montrer que  $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b - Montrer que g est décroissante sur  $[0, +\infty[$  et

croissante sur  $]-\infty; 0]$  puis vérifier que  $g(0) = 0$

2) En déduire que  $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

**Partie II :**

On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (2 - x)e^x - x$$

$(C_f)$  est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité : 1 cm)

1) a - Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b - Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  puis en déduire

que  $(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction à déterminer.

2) a - Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x \quad (\text{On sait que } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0)$$

b - Montrer que la droite (D) :  $y = -x$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$

3) a - Montrer que  $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b - Interpréter géométriquement le résultat  $f'(0) = 0$

c - Montrer que f est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  et dresser le tableau des variations de f.

4) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution

unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $\frac{3}{2} < \alpha < 2$  (on admet  $e^{\frac{3}{2}} > 3$ )

5) a - Résoudre  $f(x) + x = 0$  et en déduire que  $(C_f)$  et

(D) se coupent en un point A(2 ; -2).

b - Etudier le signe de  $f(x) + x$  sur  $\mathbb{R}$ .

c - En déduire que  $(C_f)$  est au-dessus de (D) sur  $]-\infty; 2[$  et en dessous de (D) sur  $]2, +\infty[$

6) a - Montrer que  $(C_f)$  possède un seul point d'inflexion de coordonnées (0 ; 2)

b - Construire la droite (D) et la courbe  $(C_f)$

7) a - A l'aide d'une intégration par parties montrer

$$\text{que : } \int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$$

b - En déduire en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine limité par  $(C_f)$ , la droite (D) et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = -1$ .