Solution de l'examen National 2011 SN

Exercice 1 : (2,5 pts)

1) a - Résoudre dans IR l'équation suivante :

$$x^2+4x-5=0$$

$\Delta=(4)^2-4\times1\times(-5)=36>0$ l'équation admet deux solutions distincts.

$x_1=\dfrac{-4+\sqrt{36}}{2}=\dfrac{-4+6}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-4-\sqrt{36}}{2}=\dfrac{-4-6}{2}=-5$

$S=\{-5;1\}$

b – Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation suivante :

$$\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln 2x$$

$\forall x\in]0,+\infty[$ donc $x>0$ donc $x^2+1>0$ et $x+2>0$ et $2x>0$

$$\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln 2x$$

$$\ln(x^2+5)=\ln(x+2)2x \Leftrightarrow x^2+5=(x+2)2x$$

$$\Leftrightarrow x^2+5=2x^2+4x \Leftrightarrow x^2+4x-5=0$$

Donc x = - 5 et x = 1 or x > 0 donc x = 1

D'où $S=\{1\}$

2) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation suivante :

$$\ln x+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)$$

$\forall x\in]0,+\infty[$ donc $x>0$ donc $x^2+1>0$ et $x+1>0$

$$\ln x+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)\Leftrightarrow\ln[x(x+1)]\geq\ln(x^2+1)$$

$\Leftrightarrow x(x+1)\geq x^2+1\Leftrightarrow x\geq1$ or $x>0$

D'où $S=[1,+\infty[$

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{U_n}{5+8U_n}\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad\text{et}\quad U_0=1$$

1) Montrer que : $U_n>0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0=1$ donc $U_0>0$

Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $U_n>0$ et montrons que $U_{n+1}>0$

On a $U_n>0$ donc $8U_n>0$ et $5+8U_n>5$

donc $U_{n+1}=\dfrac{U_n}{5+8U_n}>0$

D'où $U_n>0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n=\frac{1}{U_n}+2\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

a – Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 5 puis écrire V_n en fonction de n.

Montrons que $V_{n+1}=5V_n$?

$$V_{n+1}=\frac{1}{U_{n+1}}+2=\frac{1}{\frac{U_n}{5+8U_n}}+2=\frac{5+8U_n}{U_n}+2$$

$$=\frac{5}{U_n}+\frac{8U_n}{U_n}+2=\frac{5}{U_n}+8+2=5\left(\frac{1}{U_n}+2\right)$$

D'où $V_{n+1}=5V_n$

(V_n) est une suite géométrique de raison 5 de premier terme $V_0=\dfrac{1}{U_0}+2=3$

$$V_n=V_0\times5^n$$

D'où $V_n=3\times5^n\quad\forall n\in\mathbb{N}$

b – Montrer que $U_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}\quad\forall n\in\mathbb{N}$ et en déduire $\lim U_n$

a $V_n=\dfrac{1}{U_n}+2\Leftrightarrow\dfrac{1}{U_n}=V_n-2$

$\Leftrightarrow U_n=\dfrac{1}{V_n-2}\Leftrightarrow U_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}$

D'où $U_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

On a $U_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

$\lim U_n=\lim\dfrac{1}{3\times5^n-2}=0$ car $\lim 5^n=+\infty$

Et $5>1$

D'où $\lim U_n=0$

Exercice 3 : (5 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$Z^2-18Z+82=0$$

$\Delta=(-18)^2-4\times1\times82=-4<0$

$=(2i)^2$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\dfrac{18+2i}{2}=9+i$ et $z_2=\overline{z_1}=9-i$

D'où $S=\{9-i;9+i\}$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a=9+i$, $b=9-i$, $c=11-i$

a – Montrer que : $\frac{c-b}{a-b}=-i$ puis en déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

$$\frac{c-b}{a-b}=\frac{11-i-9+i}{9+i-9+i}=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=-i$$

D'où $\frac{c-b}{a-b}=-i$

On a $\frac{c-b}{a-b}=-i$ donc

$$\left|\frac{c-b}{a-b}\right|=|-i| \Leftrightarrow \frac{|c-b|}{|a-b|}=1 \Leftrightarrow \frac{BC}{BA}=1$$

Donc $BC=BA$

$$\frac{c-b}{a-b}=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})$$

Donc $\frac{c-b}{a-b}=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})$

Or $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv\arg\frac{c-b}{a-b}[2\pi]$

Donc $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $BC=BA$

D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B

b – Ecrire 4(1 – i) sous forme trigonométrique

$4(1-i)$

$$|4(1-i)|=4|1-i|=4\sqrt{2}$$

$$4(1-i)=4\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=4\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$4(1-i)=4\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})=4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$$

D'où $4(1-i)=\left[4\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$

c – Montrer que : $(c-a)(c-b)=4(1-i)$

puis en déduire que $AC\times BC=4\sqrt{2}$

$a=9+i$, $b=9-i$, $c=11-i$

$$(c-a)(c-b)=(11-i-9-i)(11-i-9+i)$$
$$=(2-2i)2=4(1-i)$$

D'où $(c-a)(c-b)=4(1-i)$

$$|(c-a)(c-b)|=|4(1-i)| \Leftrightarrow |(c-a)||(c-b)|=4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |(c-a)||(c-b)|=4\sqrt{2} \Leftrightarrow AC\times BC=4\sqrt{2}$$

D'où $AC\times BC=4\sqrt{2}$

d – Soit z l'affixe de point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$. Montrer que $z'=-iz+10+8i$ puis

$$R(M)=M' \Leftrightarrow z'-b=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-b)$$

$$z'-b=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-b)$$

$$\Leftrightarrow z'-b=\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2})(z-b)$$

$$z'=-i(z-9+i)+9-i \Leftrightarrow z'=-iz+9i+1+9-i$$

D'où $z'=-iz+10+8i$

Vérifier que l'affixe du point C′ image du point C par la rotation R est 9 – 3i

$$R(C)=C' \Leftrightarrow c'=-ic+10+8i$$
$$\Leftrightarrow c'=-i(11-i)+10+8i$$
$$\Leftrightarrow c'=-11i-1+10+8i=9-3i$$

D'où $c'=9-3i$

Problème : (9,5 pts)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=(1-x)e^x-1$$

1) a – Montrer que $g'(x)=-xe^x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$$g'(x)=(1-x)'e^x+(1-x)\left(e^x\right)'$$

$$g'(x)=-e^x+(1-x)e^x=e^x(-1+1-x)$$

D'où $g'(x)=-xe^x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

b – Montrer que g est décroissante sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$ puis vérifier que g(0) = 0

On a $g'(x)=-xe^x$ $\forall x\in\mathbb{R}$ le signe de $g'(x)$ est celui de – x car $e^x>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\forall x\in[0,+\infty[$ donc $x\geq 0 \Leftrightarrow -x\leq 0$ donc $g'(x)\leq 0$

g est décroissante sur $[0,+\infty[$

$\forall x\in]-\infty;0]$ donc $x\leq 0 \Leftrightarrow -x\geq 0$ donc $g'(x)\geq 0$

g est croissante sur $]-\infty;0]$

Vérifier que g(0) = 0

$$g(0)=(1-0)e^0-1=1-1=0$$

D'où $g(0)=0$

2) En déduire que $g(x)\leq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

On a g est continue sur $\mathbb{R}$

Puisque g est décroissante sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$ donc $g(0)$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire $g(x)\leq g(0)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

or $g(0)=0$

D'où $g(x)\leq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=(2-x)e^{x}-x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

b – Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ puis en déduire que (C_f) admet au voisinage de + ∞ une branche parabolique de direction à déterminer.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-x)e^{x}-x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-x)e^{x}}{x}-\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2-x)\frac{e^{x}}{x}-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2-x)\frac{e^{x}}{x}-1=-\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

2) a – Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et calculer

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$ (On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2-x)e^{x}-x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}2e^{x}-xe^{x}-x=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}2e^{x}-xe^{x}-x+x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}2e^{x}-xe^{x}=0$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=0$

b – Montrer que la droite (D) : y = – x est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de – ∞

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=0$

D'où la droite (D) : y = – x est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de – ∞

3) a – Montrer que $f'(x)=g(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=(2-x)e^{x}-x$$

$$f'(x)=(2-x)'e^{x}+(2-x)\left(e^{x}\right)'-1$$

$$f'(x)=-e^{x}+(2-x)e^{x}-1=e^{x}(-1+2-x)-1$$

$$f'(x)=e^{x}(1-x)-1=g(x)$$

D'où $f'(x)=g(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

b – Interpréter géométriquement le résultat f ′(0) = 0

On a f ′(0) = g(0) = 0 donc (C_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0

c – Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de

On a $f'(x)=g(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$ et $g(x)\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f'(x)\le 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

D'où f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

X	$-\infty$	$+\infty$
f′(x)	–	
f(x)	$+\infty$ ↘	$-\infty$

4) Montrer que (C_f) possède un seul point d'inflexion de coordonnées (0 ; 2)

On a $f'(x)=g(x)\qquad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f''(x)=g'(x)\qquad \forall x\in\mathbb{R}$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$$

$f''(x)\ge 0\ \ \forall x\in\left]-\infty;0\right]$ et

$f''(x)\le 0\ \forall x\in\left[0;+\infty\right[$

Donc (C_f) possède un seul point d'inflexion d'abscisse 0 et f(0) = 2

D'où (C_f) possède un seul point d'inflexion de coordonnées (0 ; 2)

5) a – A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx=3-\frac{4}{e}$

$$\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx$$

$u(x)=2-x\qquad u'(x)=-1$

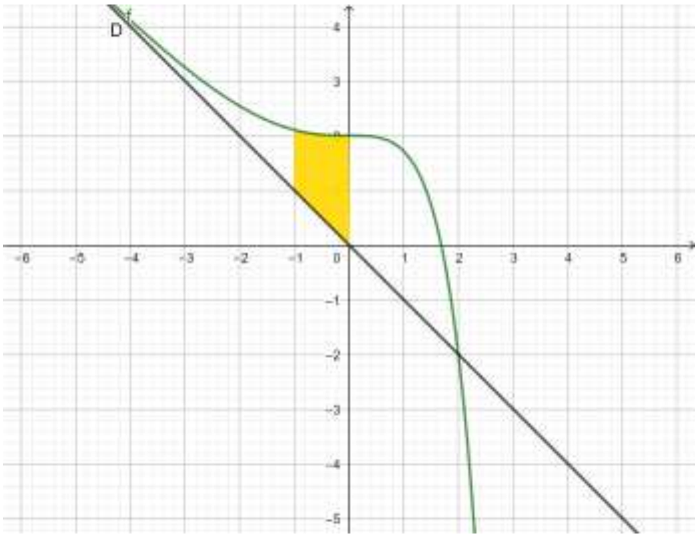
$v'(x)=e^{x}\qquad v(x)=e^{x}$

$$\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx=\left[(2-x)e^{x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-e^{x}dx$$

$$\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx=2-3e^{-1}+\left[e^{x}\right]_{-1}^{0}=2-\frac{3}{e}+1-\frac{1}{e}$$

D'où $\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx=3-\frac{4}{e}$

b – En déduire en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations
x = – 1 et x = 0.



On sait que la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $[-1;0]$

$$\mathbf{A} = \int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - (-\mathbf{x})\mathbf{dx} 1\mathbf{cm} \times 1\mathbf{cm}$$

$$\mathbf{A} = \int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{x})\mathbf{dxcm}^2$$

$$\mathbf{A} = \int_1^{\mathbf{e}} (2 - \mathbf{x})\mathbf{e}^{\mathbf{x}}\mathbf{dxcm}^2 = (3 - \frac{4}{\mathbf{e}})\mathbf{cm}^2$$

D'où $\mathbf{A} = (3 - \frac{4}{\mathbf{e}})\mathbf{cm}^2$