

Lycée ANISSE		D.S.N° 3		$\frac{1}{2}$	2.B.A.C.S.P
6pts	Exercice N° 1:	on considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{7}u_n + 3/n \in \mathbb{N}$			
0,5	1°/ Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})$ :	$u_{n+1} - \frac{7}{2} = \frac{1}{7}(u_n - \frac{7}{2})$			
1	2°/a. Montrez par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$ :	$u_n < \frac{7}{2}$			
1	b. Montrez que la suite $(u_n)$ est croissante				
0,5	c. Déduire que la suite $(u_n)$ est convergente				
3°/	on pose $v_n = u_n - \frac{7}{2}$ / $n \in \mathbb{N}$				
4,5	a. Montrez que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$ ; puis exprimez $v_n$ en fonction de $n$ .				
4,5	b. Montrez que $(\forall n \in \mathbb{N})$ : $u_n = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}(\frac{1}{7})^n$ , puis calculez sa limite.				
4pts	Exercice N° 2:	Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes.			
		$\ln(x^2+5) = \ln(x+2) + \ln(2x)$	$(2-x)\ln x > 0$	$2 - \ln(x) = 0$	
3pts	Exercice N° 3:	Calculer les limites suivantes			
		$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2x+1)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x$
7pts	Exercice N° 4:	(A) Soit $g$ la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - \frac{1}{2}\ln(x)$			

Lycée ANISSE

D.S.N° 3

$\frac{2}{2}$

2.B.A.C.S.P

0,5  $\frac{1^{\circ}}{f}$  - a - Montrez que  $(\forall x > 0) : g'(x) = \frac{2x-1}{2x}$   
 0,5  $\frac{b}{f}$  - En déduire que la fonction  $g$  est croissante sur  $[\frac{1}{2}, +\infty[$  et décroissante sur  $]0, \frac{1}{2}]$

0,5  $\frac{c}{f}$  - Montrez que  $(\forall x > 0) : g(x) > 0$  (Remarque que  $g(\frac{1}{2}) > 0$ )  
 0,25  $\frac{d}{f}$  - En déduire que  $(\forall x > 0) : x^2 - \ln x > 0$

⚡ (B) Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$$

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal

0,5  $\frac{1^{\circ}}{f}$  - a - Montrez que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  puis interprétez graphiquement.

1  $\frac{b}{f}$  - Montrez que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

0,25  $\frac{c}{f}$  - Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

1  $\frac{2^{\circ}}{f}$  - a - Montrez que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que :

$$(\forall x > 0) : f'(x) = \frac{2(x^2 - \ln x)}{x}$$

0,5  $\frac{b}{f}$  - En déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

0,5  $\frac{c}{f}$  - Montrez que la tangente à la courbe (C) au point

$$A(1,0) \text{ a pour équation : } (T) : y = 2x - 2$$

0,5  $\frac{3^{\circ}}{f}$  - a - Montrez que  $(\forall x > 0) : f''(x) = \frac{2(x^2 - 1 + \ln x)}{x^2}$

0,5  $\frac{b}{f}$  - Montrez que  $A$  est le seul point d'inflexion de (C)

0,5  $\frac{c}{f}$  - Construire la courbe (C) et la droite (T).