EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2} & si\ x\in\left]-\infty,2\right[\\ f(x)=\sqrt{x+2}+10 & si\ x\in\left[2,+\infty\right[\end{cases}$$

1) Calculer $f(2)$ *et* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
2) Est-ce que la fonction f est continue en **2 ?**
3) Etudier la continuité de f sur ***IR***.
4) Etudier la dérivabilité de f en **2**, et interpréter géométriquement les résultats.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3+3x-2$

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une seule solution α sur $\left[0;+\infty\right[$ et que $\alpha\in\left]0;1\right[$.
2) Donner un encadrement d'amplitude **0,125** de α .
3) En déduire que :

$$\left(\forall x\in\left[0;\alpha\right]\right);\ f(x)\le 0 \quad et \quad \left(\forall x\in\left[\alpha;+\infty\right[\right);\ f(x)\ge 0$$

4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera, puis calculer $f(0)$; $f^{-1}(-2)$ *et* $\left(f^{-1}\right)'(-2)$.

Exercice3 :

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x)=3-3x-x^3 & si\ x\in\left]-\infty,1\right[\\ f(x)=\sqrt{x^2-1}-1 & si\ x\in\left[1,+\infty\right[\end{cases}$$

et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Etudier la continuité de f à droite et à gauche en **1**.
2) **a)** Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en **1.** Puis Interpréter graphiquement les résultats.
3) calculer $f'(x)$ pour $x\in\left]-\infty,1\right[$.
4) Montrer que le point $I(0;3)$ est un point d'inflexion de (C_f) .
5) Donner le tableau de variation de f sur **IR.**
6) Etudier les branches infinies de (C_f) .
7) Ecrire une équation de la tangente à (C_f) au point I
8) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α *dans* $\left]-\infty,1\right[$ et que $\alpha\in\left]0;1\right[$.
9) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
10) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $\left]-\infty,1\right[$, montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera, puis tracer sa courbe dans le repère précédant.

Exercice4 :

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

1) Déterminer D_f , puis étudier les variations de f.
2) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;-2]$, montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on précisera.
3) Calculer $g^{-1}\left(-\dfrac{9}{2}\right)$, puis déterminer $g^{-1}(x)$.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

1) Déterminer D_f , calculer les limites de la fonction f aux bornes ouvertes de D_f .
2) a - Vérifier que $(\forall x\in[0;+\infty[);\ \dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$
   b - En déduire que f est strictement croissante sur $I=[0;+\infty[$.
3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle I.
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
   b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x\in J$.

Exercice 6 :

Soit f une fonction définie par : $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

1) Déterminer D_f , puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) Soit g la restriction de f sur $I=[1;+\infty[$.
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Donner le tableau de variation de g^{-1}.
   c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x\in J$.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-4\sqrt{x}+3$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) Montrer que l'équation $f(x)=x^2$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$.
3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[4;+\infty[$
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque et préciser son domaine de définition J.
   b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x\in J$.

Exercice 8 :

Calculer les limites suivantes.

$A=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{5-x^3}+x$ $B=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1}$

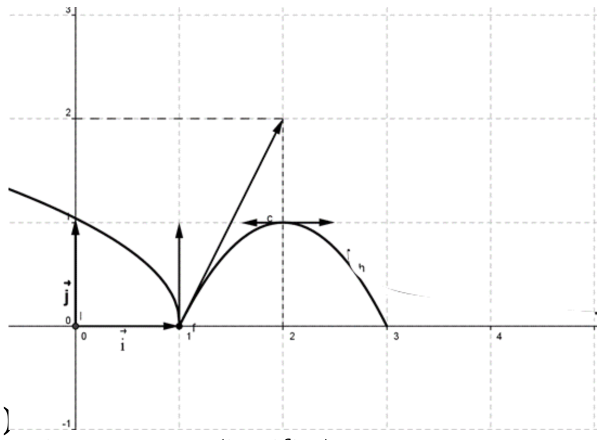
$C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+x^2}-x}{x}$ $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}}{\sqrt{4x^2+x}}$

$E=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ $F=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

$\boxed{Rappel:\ a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}\quad et\quad a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}}$

Exercice 9 :

La courbe si dessous et celle d'une fonction f définie sur $]-\infty;3]$.



(C_f)

1) Déterminer $f'(2)$, (justifier)
2) Donner $f_d'(1)$, justifier.
3) f est –elle dérivable à gauche en 1, justifier ?
4) Déterminer $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}$.
5) Dresser le tableau de variation de f sur $]-\infty;3]$.

Exercice10 :

Soit la fonction : $f:x\mapsto\dfrac{x(x^2+1)}{x^2-1}$

et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D_f, puis étudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f . Justifier les réponses !
2) Etudier la parité de f et en déduire un élément de symétrie de (C_f).
3) Etudier les limites de f aux bornes du domaine D_f et en déduire les asymptotes éventuelles à (C_f).

4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

5) Etudier la concavité de et résumer cette étude dans un tableau.

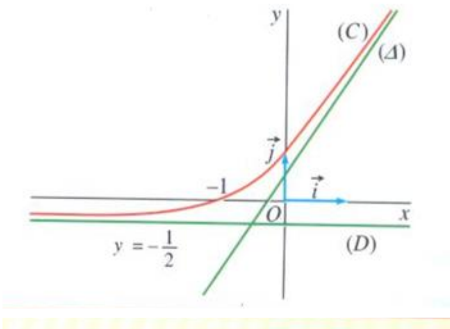
6) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à au point d'abscisse **0**.

7) Etudier la position de par rapport à (T).

8) Tracer et (T) dans le repère .

Exercice 11 :

(C) désigne la courbe représentative d'une fonction dans un repère orthonormé.



- La droite $(D): y = -\frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à la courbe **(C)** au voisinage de $-\infty$.
- La droite $(\Delta): y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe **(C)** au voisinage de $+\infty$.

Par une lecture graphique.

1) Déterminer le signe de $f(x)$.

2) Déterminer le sens de variations de .

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (2x + \frac{1}{2})$.

Exercice 12 :

Soit une fonction tel que : $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2}$

Et sa courbe dans un repère orthonormé .

1) Montrer que $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) **a)-** Montrer que : $(\forall x \in D_f);\ f(x) = x + 1 - \frac{x+1}{x^2}$

b)- Montrer que la droite $(\Delta): y = x + 1$ est une asymptote oblique à au voisinage de $+\infty$ *et* $-\infty$.

5) **a)-** Montrer que :

$$(\forall x \in D_f);\ f'(x) = \frac{x(x+1)(x^2 - x + 2)}{x^4}.$$

b)- Etudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le T.V.

6) Montrer que : $(\forall x \in D_f);\ f''(x) = \frac{-2(x+3)}{x^4}$ et étudier la concavité de puis en déduire que admet un point d'inflexion I.

7) Etudier la position relative de et de (Δ).

8) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse **1**.

9) Tracer la courbe et la droite (T).

Exercice 13 :

Partie 1 **:** Soit la fonction définie sur **IR** par :

$$g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Vérifier que : $g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

3) En déduire que : $(\forall x \in IR): g(x) > 0$.

Partie 2 : Soit la fonction définie sur **IR** par :

$$f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$$

1) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$.

2) Dresser le tableau de variation de .

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) Montrer que la droite $(D): y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à au voisinage de $+\infty$.

5) Tracer, et (D) dans un repère orthonormé .

Exercice 14:

Partie1 :Soit la fonction définie sur **IR** par :

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1$$

1) Montrer que est strictement croissante sur **IR**.

2) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

Partie2 : Soit la fonction définie sur **IR** par :

$$f(x) = 2\sqrt{3 + x^2} - x$$

1) Etudier les branches infinies de .

2) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$, puis dresser le tableau de variation de .

3) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe de en son point d'abscisse **-1**.

4) Tracer la courbe .