# Les probabilités

Prof. Smail BOUGUERCH

## Terminologie:

| Terme de probabilité | Son sens |
|---|---|
| Expérience aléatoire | Toute expérience qui admet plus d'un résultat |
| Univers des événements $\Omega$ | L'ensemble des événements possibles pour une expérience aléatoire |
| Evénement $A$ | $A$ est une partie de l'univers des événements $\Omega$ |
| Evénement élémentaire | Tout événement contenant un seul élément |
| Réalisation de l'événement $A\cap B$ | Si $A$ et $B$ sont réalisés simultanément |
| Réalisation de l'événement $A\cup B$ | Si $A$ et $B$ ou l'un des deux est réalisé |
| L'événement contraire de $A$ | C'est l'événement $\overline{A}$ ($A\cap\overline{A}=\varnothing$ et $A\cup\overline{A}=\Omega$) |
| $A$ et $B$ deux événements incompatibles | $A\cap B=\varnothing$ |

## Stabilité d'un événement – probabilité d'un événement:

### Définition:

Soit $\Omega$ l'univers des événements d'une expérience aléatoire

- Quand la probabilité d'un événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilise sur une valeur $p_i$ , on dit que la probabilité de l'événement $\{\omega_i\}$ est : $p_i$ et on écrit : $P(\{\omega_i\})=p_i$
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités élémentaires qui le compose. C'est-à-dire, si $A=\{\omega_1;\omega_2;\omega_3;...;\omega_n\}$ est un événement de l'univers $\Omega$, alors la probabilité de l'événement $A$ est : $P(A)=P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+P(\{\omega_3\})+...+P(\{\omega_n\})$

### Propriétés:

Soit $\Omega$ l'univers des événements d'une expérience aléatoire

- $P(\varnothing)=0$ et $P(\Omega)=1$
- $0\leq P(A)\leq 1$ pour tout événement $A$ de $\Omega$
- Probabilité de l'union de deux événements:
  Pour tous événements $A$ et $B$ de $\Omega$
  $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
  - Si $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, on dit que $A$ et $B$ sont incompatibles
- Probabilité de l'événement contraire:
  Pour tout événement $A$ de $\Omega$ : $P(\overline{A})=1-P(A)$

## Hypothèse d'équiprobabilité:

### Définition:

Si tous les événements élémentaires, dans une expérience aléatoire dont l'univers des événements est $\Omega$ , sont équiprobables, alors la probabilité de tout événement $A$ de $\Omega$ est : $P(A)=\dfrac{CardA}{Card\,\Omega}$

## Probabilité conditionnelle – indépendance de deux événements:

### Définition:

Soit $A$ et $B$ deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que : $P(A)\neq 0$
La probabilité d'un événement $B$ sachant que l'événement $A$ est réalisé est :

$$P_A(B)=P\left(B/A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

**Résultat:**

Pour tous événements $A$ et $B$ liés à une même expérience aléatoire tel que : $P(A)\times P(B)\neq 0$

On a : $P(A\cap B)=P(A)\times P\left(B/A\right)=P(B)\times P\left(A/B\right)$

**Définition:**

Pour tous événements $A$ et $B$ liés à une même expérience aléatoire
$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ $\Leftrightarrow$ $A$ et $B$ sont deux événements indépendants

**Propriété:**

Soit $\Omega$ un univers d'événements d'une expérience aléatoire, et $\Omega_1$ et $\Omega_2$ deux sous-univers de $\Omega$
($\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$ et $\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$)

Pour tout événement $A$ de $\Omega$ : $P(A)=p(\Omega_1)\times p\left(A/\Omega_1\right)+p(\Omega_2)\times p\left(A/\Omega_2\right)$

## Loi de probabilité d'une variable aléatoire:

Soit $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$ univers d'événements d'une expérience aléatoire
Pour déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ , on suit les deux étapes suivantes :

- Détermination de $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3;\ldots;x_n\}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre $X$
- Calcul des probabilités $p(X=x_i)$ pour tout $i$ de l'ensemble $\{1;2;3;\ldots;n\}$

## L'espérance mathématique – la variance – l'écart type d'une variable aléatoire:

Soit $X$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est représentée dans le tableau à côté :

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

**Définitions:**

| | |
|---|---|
| **L'espérance mathématique de $X$** | $E(X)=x_1\times p_1+x_2\times p_2+x_3\times p_3+\ldots+x_n\times p_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i$ |
| **La variance de $X$** | $v(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\times p_i-\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i\right]^2$ |
| **L'écart type de $X$** | $\sigma(X)=\sqrt{v(X)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\times p_i-\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i\right]^2}$ |

## La loi binomiale:

Soit $p$ la probabilité d'un événement $A$ dans une expérience aléatoire
On répète cette épreuve $n$ fois de suite
La variable aléatoire $X$ qui lie chaque résultat au nombre de fois que cet événement se réalise s'appelle une variable aléatoire binomiale de paramètres $n$ et $p$

Et on a : $\forall k\in\{0;1;2;3;\ldots;n\}$ ; $p(X=k)=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}$

Et $E(X)=n\times p$

Et $v(X)=n\times p\times(1-p)$