

**Le dénombrement**

Prof. Smail BOUGUERCH

**Cardinal d'un ensemble:****Définition:**

Le cardinal d'un ensemble fini  $E$  est le nombre des éléments de cet ensemble et on le note :  $CardE$

**Cas particulier:**  $Card \emptyset = 0$

**Propriété:**

$A$  et  $B$  sont deux ensembles finis

$$Card(A \cup B) = CardA + CardB - Card(A \cap B)$$

**Accompli d'un ensemble:****Définition :**

Soit  $A$  une partie d'un ensemble fini  $E$

L'accompli de  $A$  par rapport à l'ensemble  $E$  est l'ensemble noté  $\bar{A}$  avec :  $\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$

**Remarques:**

- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A \cup \bar{A} = E$
- $Card \bar{A} = CardE - CardA$

**Le principe fondamental du dénombrement:**

Si une opération globale peut se décomposer en  $p$  opérations élémentaires successives ( $p \in \mathbb{N}^*$ ), ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de  $n_1; n_2; \dots; n_p$  manières différentes, alors l'opération globale peut se faire de:  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$  manières différentes.

**Arrangement avec répétition – sans répétition:****Arrangement avec répétition:**

Soit  $n$  et  $p$  deux éléments de  $\mathbb{N}^*$  ( $p \leq n$ )

Le nombre d'arrangement avec répétition, de  $p$  éléments parmi  $n$ , est :  $n^p$

**Arrangement sans répétition:**

Soit  $n$  et  $p$  deux éléments de  $\mathbb{N}^*$  ( $p \leq n$ )

Le nombre d'arrangement sans répétition, de  $p$  éléments parmi  $n$ , est :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}_{p\text{-facteurs}}$$

**Cas particulier:**

Tout arrangement sans répétition de  $n$  éléments parmi  $n$  éléments s'appelle une permutation de  $n$  éléments et il est égal à :  $A_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$

**Les combinaisons:**

Soit  $E$  un ensemble fini contenant  $n$  éléments  
 Toute partie  $A$  de  $E$  contenant  $p$  éléments ( $p \leq n$ ), s'appelle une combinaison de  $p$  éléments parmi  $n$  éléments, et le nombre de ses combinaisons est :  $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

**Les nombres  $n!$  et  $A_n^p$  et  $C_n^p$  :**

$(n \in \mathbb{N}^*);$		$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$	
		$0! = 1$	
$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$		$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	
$C_n^n = 1$	$C_n^1 = n$	$C_n^0 = 1$	$C_n^{n-1} = n$ $C_n^p = C_n^{n-p}$
$C_n^p = C_n^{n-p}$		$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$	

**Nombre de possibilité d'arrangement de  $n$  éléments:**

Si on a,  $n_1$  éléments de type  $A$ , et  $n_2$  éléments de type  $B$ , et  $n_3$  éléments de type  $C$ , parmi  $n$  éléments, avec  $n = n_1 + n_2 + n_3$ , alors le nombre de possibilité d'arranger ses éléments est :  $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$

**Quelques types de tirage:**

On tire  $p$  éléments parmi  $n$  éléments ( $p \leq n$ ) et on résume les résultats dans le tableau suivant :

Type de tirage	Nombre de tirages possibles	Importance de l'ordre de tirage
Simultané	$C_n^p$	Pas important
Successif et avec remise	$n^p$	important
Successif et sans remise	$A_n^p$	important