NOTIONS DE DENOMBREMENT

I. Ensemble fini – cardinal d'un ensemble fini

a. Définition :

$n \in \mathbb{N}^*$; E est un ensemble qui contient n éléments . On dit que E est un ensemble fini .

Le nombre n s'appelle le cardinal de E on note $\text{card}E = n$ avec $\text{card}\varnothing = 0$.

b. Exemple :

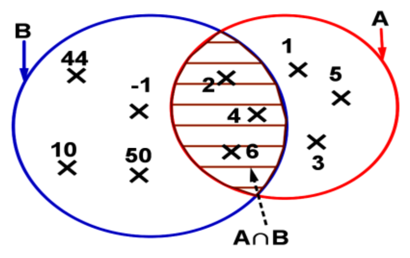
- Soit $E = \{a,b,c,f\}$ donc $\text{card}E = 4$.
- Les ensembles : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ et $[0,1[$ sont des ensembles infinis

c. Propriété :

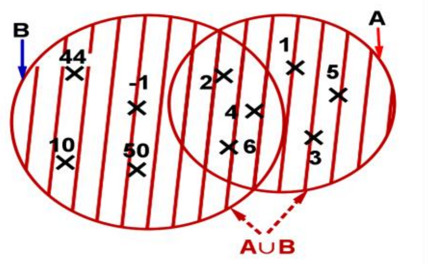
E et F sont deux ensembles .

- Si $E \cap F = \varnothing$ alors $\text{card}E \cup F = \text{card}E + \text{card}F$.
- En général : $\text{card}E \cup F = \text{card}E + \text{card}F - \text{card}E \cap F$.
- $\text{card}E \times F = \text{card}E \times \text{card}F$; $E \neq \varnothing$ et $F \neq \varnothing$.
- Si $A \subset E$ (A est une partie de E) , on note l'ensemble suivant : $\{x \in E / x \notin A\}$ par $\overline{A} = E \setminus A$.
- On a : $\text{card}\overline{A} = \text{card}E - \text{card}A$.

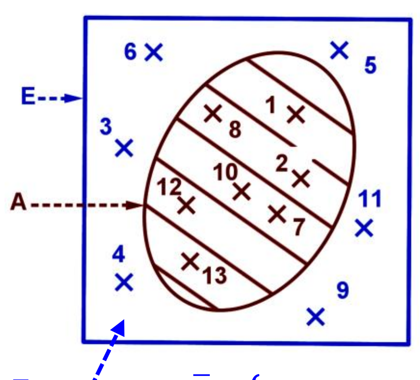
d. Exemple :



$\text{cad}A = 7$ et $\text{card}B = 6$ et $\text{card}A \cap B = 3$



$\text{cad}A = 7$ et $\text{card}B = 6$ et $\text{card}A \cup B = 10$



$\overline{A} = E - A$ et $\overline{A} = \{3,4,5,6,9,11\}$

$E \times F = \{1,2\} \times \{a,b,c\} = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

II. Principe fondamental de dénombrement :

a. Activité :

On veut déterminer tous les nombres constitués par deux chiffres différentes parmi les chiffres 3 et 4 et 5 et combien de nombres on a formé ?

1ère méthode (aléatoire) :

54 – 45 - 35 – 43 – 53– 34 donc on a obtenue 6 nombres .

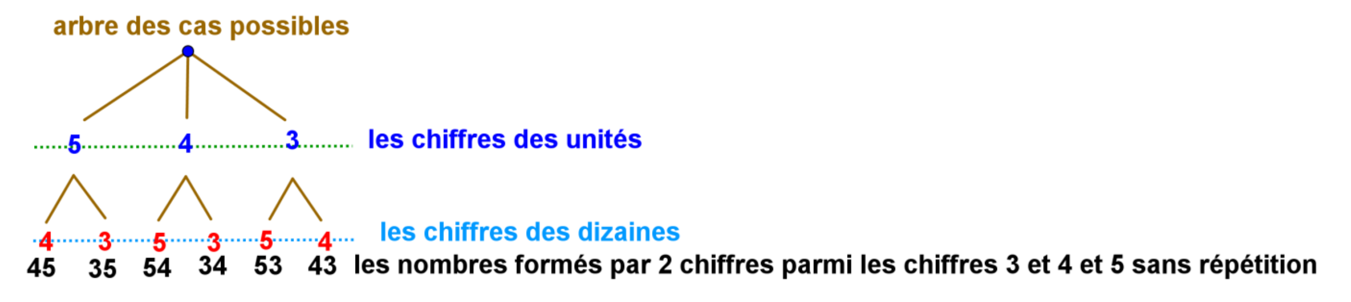
2ème méthode :

On sait que tout nombre former par 2 chiffres est écrit de la forme $\overline{ba}$ tel que :

a désigne le chiffre des unités ; b désigne le chiffre des dizaines .

- Le premier choix sera pour le chiffre des unités a le nombre des manières pour choisir a est 3 (on choisit le chiffre 3 ou 4 ou 5) .
- Le deuxième choix sera pour le chiffre des dizaines b le nombre des manières pour choisir b est 2 (car les deux chiffres sont différents) .

  D'où : le nombre des chiffres est $3\times 2=6$.
- Cette méthode on peut la représenter de la manière suivante , on l'appelle arbre des éventualités (ou arbre des cas) .



b. Principe général de dénombrement (ou principe du produit) :

On considère une expérience comporte p choix (étape) avec $\left(p\in\{1,2,3,....\}\right)$.

- Si le choix n° 1 se fait avec n_1 manières différentes .
- Si le choix n° 2 se fait avec n_2 manières différentes .
- ……………………………………………………….. .
- Si le choix n° p se fait avec n_p manières différentes .

Alors le nombre total des manières des p choix est $n_1\times n_2\times n_3\times\ldots\times n_p$.

c. Exemples :

Exemple 1 :

On lance un dé (a 6 faces numérotés de 1 à 6) deux fois successives .

- Chaque résultat obtenue est constitué par :
  - ✓ Le résultat lorsque on lance le dé pour la 1ère fois .
  - ✓ Le résultat lorsque on lance le dé pour la 2ième fois .
- Le résultat obtenue après de lancer le dé 2 fois est appelé cas possible ou éventualité .

1. Déterminer le nombre des cas possibles (ou des éventualités)
   - Le 1er lancer a 6 choix (ou cas possibles) .
   - Le 2ième lancer a 6 choix (ou cas possibles) .

En appliquant le principe général de dénombrement (ou principe du produit) le nombre des cas possibles (ou des éventualités) est : $6\times6=36$.

2. Déterminer le nombre des cas possibles (ou des éventualités) tel que le 1^er lancer donne un nombre paire .
   - Le 1^er lancer a 3 choix (ou cas possibles sont 2 ou 4 ou 6) .
   - Le 2^ième lancer a 6 choix (ou cas possibles tous les résultats sont acceptés) .

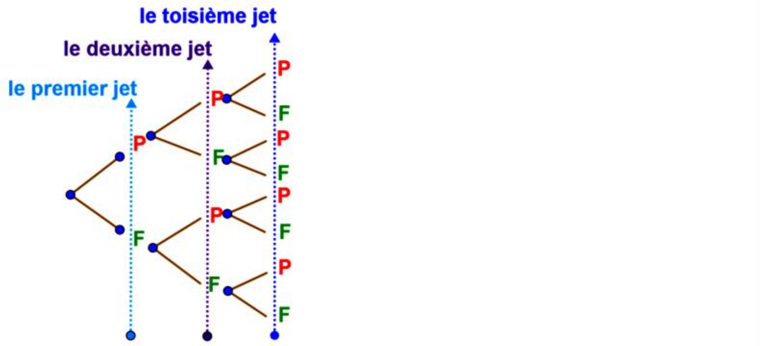
   En appliquant le principe général de dénombrement (ou principe du produit) le nombre des cas possibles (ou des éventualités) est : $3\times6=18$.

Exemple 2 :

Une pièce de monnaie a deux faces : une face sera désigner par P (pile) l'autre face sera désigner par F (face) .
On lance dans l'air la pièce de monnaie 3 fois successives (si le 1^er lancer donne P et la 2^ième lancer donne F et la 3^ième lancer donne P cet éventualité (ou cas possible) sera noté **PFP** .

1. On détermine le nombre des cas possibles :
   - Le 1^er lancer a 2 choix (ou cas possibles) .
   - Le 2^ième lancer a 2 choix (ou cas possibles) .
   - Le 3^ième lancer a 2 choix (ou cas possibles) .

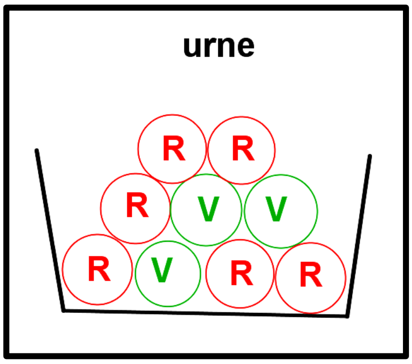
   En appliquant le principe général de dénombrement (ou principe du produit) le nombre des cas possibles (ou des éventualités) est : $2\times2\times2=8$.
2. On donne l'arbre des cas possibles :



arbre des cas possibles lorsqu'on lance une pièce de monnaie 3 fois successives

III. Arrangement avec répétition :

a. Activité :



une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes.
On tire 2 boules de l'urne l'une après l'autre et avec remise (c.à.d. la boule tiré doit être remettre à l'urne avant de tiré la boule suivante) on dit tirage avec remise .

Questions :

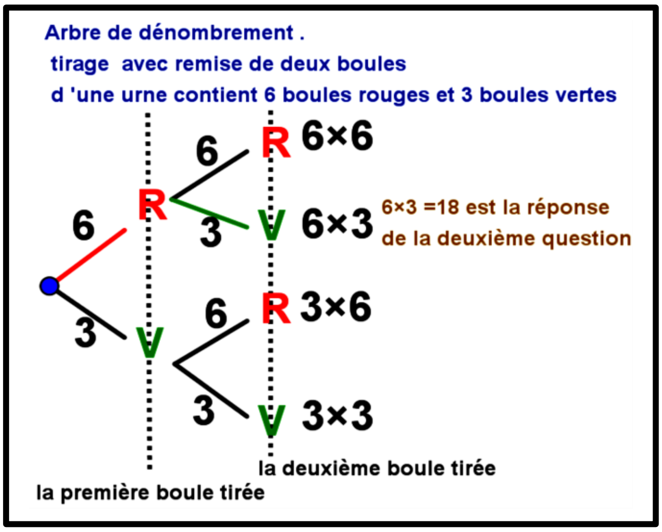
1. Quel le nombre des tirages possibles ?
2. Quel le nombre des tirages tel que la première boule tirée est rouge et la 2^ième est verte ?

Correction :

1. le nombre des tirages possibles (ou les cas possibles)
   - ✓ la 1^ère boule tirée a 9 manières d'être tirer .
   - ✓ la 2^ième boule tirée a 9 manière d'être tirer .
   - ✓ d'après le principe général de dénombrement le nombre des tirages possibles est $9\times9=9^2$.

2. le nombre des tirages tel que la première boule tirée est rouge et la 2ième est verte .
   - ✓ la 1ère boule tirée a 6 manières d'être tirer .
   - ✓ la 2ième boule tirée a 3 manière d'être tirer .
   - ✓ d'après le principe général de dénombrement le nombre des tirages possibles est $6\times3=18$

3. On donne l'arbre des cas possibles :



b. Propriété :

Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments est le nombre n^p .

c. Remarque :

On représente une arrangement avec répétition de p éléments parmi les éléments suivants x_1 et x_2 et x_3 et …. x_n par :

Numéro du classement (N° d'ordre)	1	2	3	…..	$p-1$	p
L'élément qui a ce classement (On a le droit de répéter les éléments)	x_5	x_2	x_7	…..	x_7	x_3

IV. Arrangement sans répétition de p éléments parmi n éléments :

a. Activité :

Course de marathon entre 4 athlètes nommés de la manière suivante A et B et C et D .
A la fin de la course , deux prix sont distribués de la façon suivante :
- ✓ 50 000 dh pour le vainqueur de la course (la 1ère place) .
- ✓ 10 000 dh pour l'athlète qui a obtenue la 2ième place.
- ✓ Sachant qu'à la fin de la course chaque place est occupé par un seul athlète .

1. On donne un exemple de distribuer les deux prix
   On suppose que le premier prix est arraché par l'athlète D et le 2ième prix est obtenue par B .

Cet exemple sera présenté de la manière suivante $\begin{matrix}1 & 2\\ D & B\end{matrix}$ ou DB ou

Remarque : Le résultat DB n'est pas identique au résultat BD.

b. Vocabulaire :

chaque résultat obtenue à la fin de la course s'appelle arrangement sans répétition de 2 éléments parmi 4 éléments .

c. Définition :

Ordonné p éléments avec répétition parmi n éléments (répétition = avec possibilité de répéter les éléments) s'appelle arrangement avec répétition de p éléments parmi n éléments .

d. Propriété :

- Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments est le nombre :

$$A_n^p = \underbrace{n\times(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}_{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$.(avec $0\le p\le n$ et $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$)

- Le nombre suivant : $1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$ par $n!=1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$ on lit : factoriel n ($n\in\mathbb{N}^*$) avec $0!=1$; $1!=1$.

e. Remarque :

La touche $\boxed{nPr}$

- Pour calculer $n!$ on peut utiliser calculatrice scientifique la touche suivante
- $A_n^0=1$ et $A_n^1=n$ et $A_n^2=\underbrace{n(n-1)}_{2}$ et $A_n^3=\underbrace{n(n-1)(n-2)}_{3}$
- On représente un arrangement sans répétition de p éléments parmi les éléments suivants x_1 et x_2 et x_3 et …. x_n par la manière suivante :

Numéro du classement (N° ordre)	1	2	3	…..	$p-1$	p
L'élément qui a ce classement (On obtient un arrangement sans répétition)	x_5	x_2	x_7	…..	x_1	x_3

f. Modèle d'une urne ou un sac contient (des boules ou des jetons ou des pions)

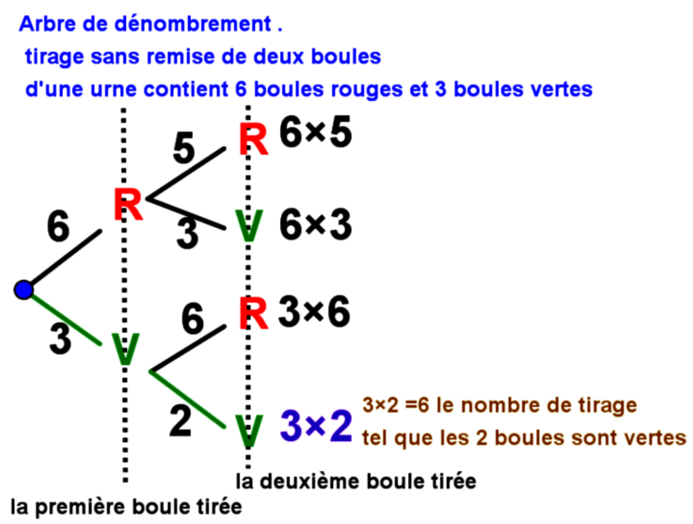
Une urne contient n boules lorsque on tire p boules l'une après l'autre et sans remise (c.à.d. la boule tiré doit être à l'extérieure de l'urne avant de tiré la boule suivante) on dit tirage sans remise .

Exemple :une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes .

Questions :

1. Quel le nombre des tirages possibles ?
2. Quel le nombre des tirages tel que les deux boules sont vertes ?

Réponse :1ère Q. $A_9^2=9\times8$ 2ième Q $A_3^2=3\times2$



V. Permutation de n éléments c.à.d. : arrangement sans répétition de n éléments parmi n éléments :

a. Définition :

Ordonné n éléments sans répétition parmi n éléments (c.à.d. pas de possibilité de répéter les éléments) s'appelle permutation de n éléments .

b. Propriété :

Le nombre des permutation de n éléments est le nombre $A_n^n = n!$.(avec $n \in \mathbb{N}$) .

c. Remarque :

- Pour calculer $n!$ on peut utiliser calculatrice scientifique la touche suivante

La touche $\boxed{n!}$

- On représente une permutation de n éléments parmi les éléments : x_1 et x_2 et .. x_n par

Numéro du classement	1	2	3	.....	$n-1$	n
L'élément qui a ce classement (On obtient une permutation)	x_4	x_2	x_8	.....	x_1	x_{n-3}

d. Exemple :

Course de marathon entre 4 athlètes nommés de la manière suivante A et B et C et D .
A la fin de la course , quatre prix sont distribués de la façon suivante :

- ✓ 50 000 dh pour le vainqueur de la course (la 1ère place) .
- ✓ 40 000 dh pour l'athlète qui a obtenue la 2ième place.
- ✓ 30 000 dh pour l'athlète qui a obtenue la 3ième place.
- ✓ 20 000 dh pour l'athlète qui a obtenue la 4ième place.
- ✓ Sachant qu'à la fin de la course chaque place est occupé par un seul athlète .

1. On donne un exemple de distribuer les deux prix
On suppose que le premier prix est arraché par l'athlète D et le 2ième prix est obtenue par B et et le 3ième prix est obtenue par C et et le 4ième prix est obtenue par A .

Cet exemple sera présenté de la manière suivante

1	2	3	4
D	B	C	A

ou DBCA ou

D	B	C	A
le premier prix	le deuxième prix	le troisième prix	le quatrième prix

Remarque : Le résultat DBCA n'est pas identique au résultat ABCD .

VI. Combinaison de p éléments parmi n éléments :

a. Activité :

Soit l'ensemble $E = \{a,b,c,d,f\}$ on donne une partie de E . Par exemple $A = \{b;d\}$ et $B = \{a,c,f\}$ et $H = \varnothing$

- La partie $A = \{b;d\}$ est appelée aussi combinaison de 2 parmi 5 .
- La partie $B = \{a,c,f\}$ est appelée aussi combinaison de 3 parmi 5 .
- La partie $H = \varnothing$ est appelée aussi combinaison de 0 parmi 5

b. Définition :

E est un ensemble fini ($\text{card}E = n$) toute partie A de E contient p éléments (avec $(p \le n)$ s'appelle combinaison de p éléments parmi n éléments .

c. Propriété :

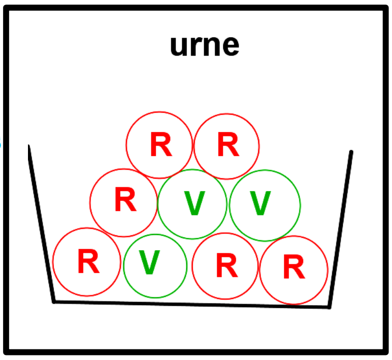
Le nombre des combinaisons p éléments $(p \in \{0,1,2,3,.....\})$ parmi n éléments est le nombre entier naturel : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)\times p!} = \frac{\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}^{p}}{1\times2\times3\times\cdots\times p}$.

(avec $0 \le p \le n$ et $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$).

d. Exemple :

- $C_7^3 = \frac{7\times6\times5}{1\times2\times3} = 35$.

e. Modèle d'une urne ou un sac contient (des boules ou des jetons ou des pions



une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes.
On tire simultanément 2 boules de l'urne.

Questions :

1. Quel le nombre des tirages possibles ?
2. Quel le nombre des tirages tel que les 2 boules tirés sont de couleurs différentes

Correction :

1. le nombre des cas possibles

1. Calculons $\text{card}\Omega$.

Le tirage simultanément de 2 boules parmi 9 boules représente une combinaison de 2 parmi 9 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 2 parmi 9 donc :

$\text{card}\Omega = C_9^2 = \frac{9\times8}{1\times2} = 36$.

Conclusion : le nombre des tirages possibles est 36 tirages possibles .

2. le nombre des tirages tel que les 2 boules tirés sont de couleurs différentes :
on considère A « Les deux boules tirés sont de couleurs différentes »

On calcule $\text{card}A$

- A « Les deux boules tirés sont de couleurs différentes » ou encore
- A « une boule rouge et l'autre verte »

- une boule rouge parmi 6 boules rouges donc $C_6^1 = 6$ manière différentes .
- une boule verte parmi 3 boules vertes donc $C_3^1 = 3$ manière différentes .

donc : $\text{card}A = C_6^1 \times C_3^2 = 18$.

Conclusion : le nombre des tirages tel que les 2 boules tirés sont de couleurs différentes est 18 tirages qui réalise A.

f. Remarque :

- Pour calculer C_n^p on peut utiliser calculatrice scientifique la touche suivante
- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

La touche
nCr

- $C_n^p = C_n^{n-p}$ (avec $0 \le p \le n$ et $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$).

  donc le nombre des manières de choisir 2 responsables d'une classe de 40 élèves est égale au nombre des manières de choisir 38 responsables d'une classe de 40 élèves

- relation de Pascal : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ et $0 \le p \le n-1$.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	...	p	p+1	....	n−1	n	n+1
0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	4	1									
5	1	5	$\boxed{10}$	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							
⋮	⋮							1						
p	1								1					
p+1	1									1				
⋮	⋮										1			
n−1	1									1		1		
n	1								C_n^p	C_n^{p+1}			1	
n+1	1									C_{n+1}^{p+1}				1

VII. binôme de Newton :

a. Théorème :

Soient a et b de $\mathbb{R}$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* : (a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^i b^{n-i}$. (car $a+b=b+a$)

b. Exemple :

$$(x+2)^4 = \sum_{i=0}^{i=4} C_4^i x^i 2^{4-i} = C_4^0 x^0 2^4 + C_4^1 x^1 2^3 + C_4^2 x^2 2^2 + C_4^3 x^3 2 + C_4^i x^4 2^0 = 1 \times 2^4 + 4x \times 2^3 + 6x^2 \times 2^2 + 4x^3 \times 2^2 + 1x^4$$