

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1 : Calculez les intégrales suivantes .

$$I_1 = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \quad I_2 = \int_1^0 (x + e^x) dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \quad I_4 = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$$

$$I_5 = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} dx \quad I_6 = \int_1^2 \frac{x}{(x^2 - 4)^2} dx$$

$$I_7 = \int_{-1}^1 x |x| dx \quad I_8 = \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 + 2x - 5 dx$$

$$I_9 = \int_0^1 t(t^2 + 1)^3 dt \quad I_{10} = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad I_{12} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$I_{13} = \int_0^3 |2t - 1| dt \quad I_{14} = \int_{-1}^5 |x - 2| + |x - 4| dt$$

$$I_{15} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dt \quad I_{16} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dt$$

EXERCICE2 :

Calculez les intégrales suivantes par la méthode d'intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^1 x e^x dx \quad I_2 = \int_1^e x \ln x dx$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$I_5 = \int_1^x \ln t . dt \quad I_6 = \int_0^1 x \sqrt{1+x} dx$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$I_9 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx \quad I_{10} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$I_{11} = \int_1^e x^2 \ln x . dx \quad I_{12} = \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$I_{13} = \int_0^x \cos t . e^t dt \quad I_{14} = \int_0^x \sin t . e^t dt$$

$$I_{15} = \int_1^{e^2} (x^3 + 1) \ln(x) dx$$

EXERCICE3 :

On Considère les deux intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

1) Calculer I .

2) Considérons $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ et f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

a) Montrer que $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

b) Déterminer une relation entre I et J .

c) En déduire le calcul de J .

EXERCICE4 :

Considérons les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} ; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

1) Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2}).$$

a- Calculer la dérivée de f .

b- Calculer la valeur de I .

2) a- Vérifier que $J + 2I = K$.

b- Montrer que $K = \sqrt{3} - J$

c- En déduire les valeurs de J et de K .

EXERCICE5 :

$$\text{Soit } f : x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)}.$$

1) Etudier les variations de f .

2) En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right) : 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

3) a) Vérifier que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right) : 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

b) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(1-x)}$$

c) Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$.

d) Montrer que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

EXERCICE6 :

f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 4 cm).

1) Déterminer l'aire $S(\lambda)$, de la surface délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$ (avec $\lambda > 0$).

2) Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$.

EXERCICE7 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x + 3 + \frac{2(1-\ln x)}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad (C_f) \text{ sa courbe}$$

représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Montrer que la droite $(D) : y = x + 3$ est une asymptote à la courbe (C_f) .

b) Etudier la position de (C_f) et (D) .

2) Déterminer l'aire $S(\lambda)$ de la surface comprise entre la courbe (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\lambda$ avec $\lambda \geq 1$.

EXERCICE8 :

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{(x-2)^3}$.

1) Déterminer D_f

2) Déterminer les réels a et b tel que :

$$\left(\forall x \in D_f\right) : f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x-2)^3}$$

3) Calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

EXERCICE9 :

Pour tout réel positif a , on définit $I(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I(a) = \frac{\ln(a)-1}{a^2} + 1.$$

2) En déduire la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

3) On définit maintenant $J(a) = \int_1^a \frac{\ln(x)}{x^2+1} dx$.

4) Vérifier que : $(\forall x \geq 1) : x^2 \leq x^2+1 \leq 2x^2$, puis montrer que $\frac{1}{2} I(a) \leq J(a) \leq I(a)$.

EXERCICE9 :

a- Vérifier que pour tout réel x on a :

$$\frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

b- En déduire la valeur de $J = \int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2}$.

c- A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale suivant $K = \int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x+1)^3} dx$