

**Exercice 1 :**

Calculer les intégrales suivantes :

$$a = \int_1^2 (x^2 + 2x + 3) dx \quad ; ; \quad b = \int_0^1 (x^5 - 6x) dx \quad ; ; \quad c = \int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} dx \quad ; ; \quad d = \int_0^1 (x+3)(x^2+6x+1)^3 dx .$$

$$e = \int_0^1 (x^2 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx \quad ; ; \quad f = \int_{-1}^2 |x^2 - 1| dx \quad ; ; \quad g = \int_1^2 \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{3x^2 - x^3}} dx \quad ; ; \quad h = \int_2^3 \frac{|x^2 - 1|}{x^3 - 3x} dx .$$

$$i = \int_{-1}^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \quad ; ; \quad j = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{|\ln x|}{x} dx \quad ; ; \quad k = \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \quad ; ; \quad l = \int_1^2 \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + 2x^2} dx \quad ; ; \quad m = \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx .$$

$$n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx \quad ; ; \quad o = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3 dx \quad ; ; \quad p = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 - \cos x} dx .$$

**Exercice 2 :**

En utilisant une intégration par parties ; Calculer les intégrales suivantes :

$$a = \int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx \quad ; ; \quad b = \int_{\sqrt{e}}^e x^5 \ln x dx \quad ; ; \quad c = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx \quad ; ; \quad d = \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} dx .$$

$$e = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x dx \quad ; ; \quad f = \int_0^{\pi} 2x \cos^2(x) dx \quad ; ; \quad g = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln(1 + \cos x) dx .$$

**Exercice 3 :**

On considère les deux intégrales :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx .$

- ① - Calculer et I-J.
- ② - Calculer I + J.
- ③ - En déduire la valeur de I et J.

**Exercice 4 :**

On considère les deux intégrales :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx .$

- ① - Calculer J.
- ② - Calculer I-J.
- ③ - En déduire la valeur de I.

**Exercice 5 :**

Soit f la fonction définie par:  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$  avec  $t \in [1;2]$ .

- ① - Vérifier que : pour tout  $1 \leq t \leq x \leq 2$  on a :  $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq f(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} .$

② - En déduire que :  $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \leq F(x) \leq \frac{x-1}{\sqrt{2}}$ . Tel que  $F(x)$  est la fonction primitive de la fonction  $f$  qui s'annule en 1.

③ - Soit  $g(x)$  la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1; x]$ .

Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

### Exercice 6 :

Soit  $f$  la fonction définie par:  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$  et soit  $(\mathcal{E}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ .

① - Calculer les intégrales :  $I = \int_1^e \frac{dx}{x}$  et  $J = \int_1^e \ln x dx$ .

② - Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(\mathcal{E}_f)$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=1$  et  $x=e$ .

③ - Montrer que :  $G(x) = x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2]$  est une fonction primitive de la fonction  $g(x) = (\ln x)^2$ .

④ - Soit  $t \in ]0; 1[$ .

a - Calculer les intégrales :  $A = \int_t^1 \left(\frac{\ln x}{x}\right) dx$  et  $B = \int_t^1 (\ln x)^2 dx$ .

b - Calculer en fonction de  $t$  le volume  $V(t)$  du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe  $(\mathcal{E}_f)$  sur l'intervalle  $[t; 1]$ .

c - Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t)$ .

### Exercice 7 :

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \int_1^e x (\ln x)^{n+1} dx$  et  $u_0 = \int_1^e x \ln x dx$ .

① - En utilisant une intégration par partie, Calculer  $u_0$ .

② - En utilisant une intégration par partie, Calculer  $u_1$ .

③ - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \geq 0$ .

④ - Montrer que  $(u_n)$  est une suite décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

⑤ - En utilisant une intégration par partie,

Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 2u_{n+1} + (n+2)u_n = e^2$

⑥ - a - Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ .

b - En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .