تمارين مصححة في الميكانيك

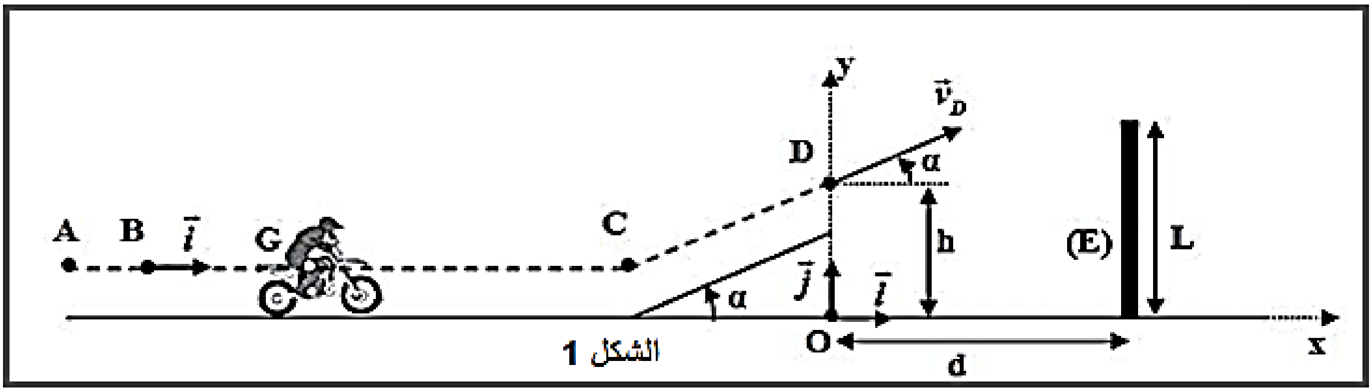
تمرين 1:

يهدف هذا التمرين إلى دراسة حركة مركز القصور G لمجموعة (S) كتلتها m مكونة من دراجة نارية وسائقها على حلبة سباق.

تتكون حلبة سباق من جزء مستقيمي أفقي وجزء مستقيمي مائل بزاوية α بالنسبة للمستوى الأفقي، ومنطقة للسقوط بها حاجز (E) علوه L يوجد على مسافة d من المحور الرأسي المار من النقطة D (الشكل 1).

معطيات:

- جميع الاحتكاكات مهملة؛
- $m = 190\ kg$ ؛ $L = 10\ m$ ؛ $d = 20\ m$ ؛ $\alpha = 26°$



الشكل 1

1. حركة المجموعة (S) على الجزء الأفقي

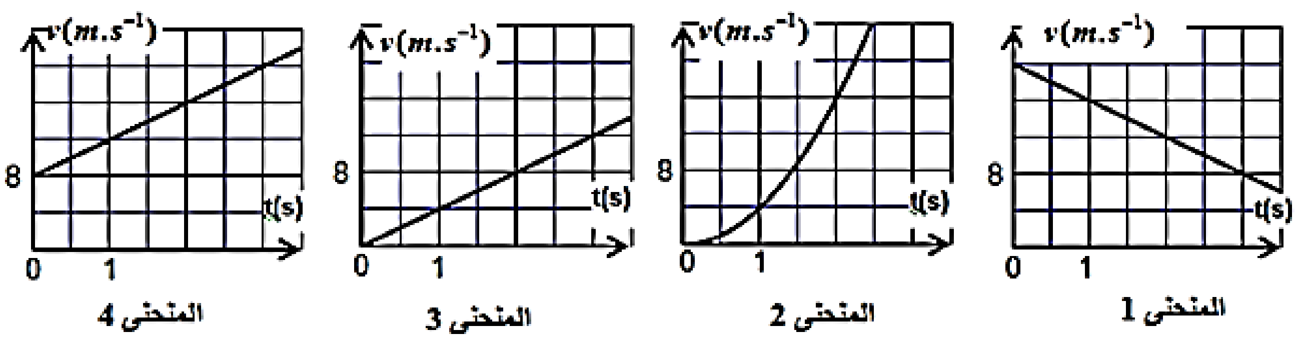
تنطلق المجموعة (S) من موضع يكون فيه مركز قصورها G منطبقا مع النقطة A. يمر G من النقطة B بالسرعة $\vec{v}_0 = v_0.\vec{i}$ عند اللحظة $t_0 = 0$. تخضع المجموعة (S) خلال حركتها لقوة محركة أفقية $\vec{F}$ ثابتة لها نفس منحى الحركة حيث مسار G مستقيمي.

لدراسة حركة G بين B و C نختار معلما $(B,\vec{i})$ مرتبطا بالأرض نعتبره غاليليا حيث $x_G = x_B = 0$ عند $t_0 = 0$.

1.1 بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، بين أن تعبير تسارع حركة G هو $a_G = \frac{F}{m}$. استنتج طبيعة حركة G.

2.1 يعبر عن السرعة اللحظية $v_G(t)$ لمركز القصور G بالعلاقة $v_G(t) = a_G.t + v_0$.

أ. عين، معللا جوابك، المنحنى الذي يمثل السرعة اللحظية $v_G(t)$ من بين المنحنيات الأربعة الممثلة في الشكل (2).



الشكل 2

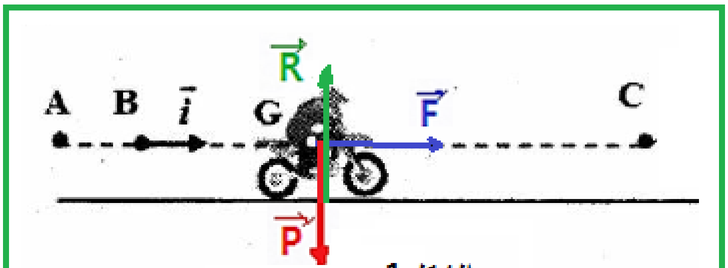
ب. استنتج قيمة كل من السرعة البدئية v_0 والتسارع a_G لمركز القصور G.

3.1 أحسب شدة القوة المحركة $\vec{F}$.

تصحيح التمرين 1:

1- حركة المجموعة (S) على الجزء الأفقي

1-1- إثبات تعبير تسارع حركة G :



الشكل 1

المجموعة المدروسة : المجموعة (S)

جرد القوى:

$\vec{P}$: وزن المجموعة

$\vec{R}$: تأثير سطح التماس

$\vec{F}$: تأثير القوة المحركة الأفقية

تطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}_G$$

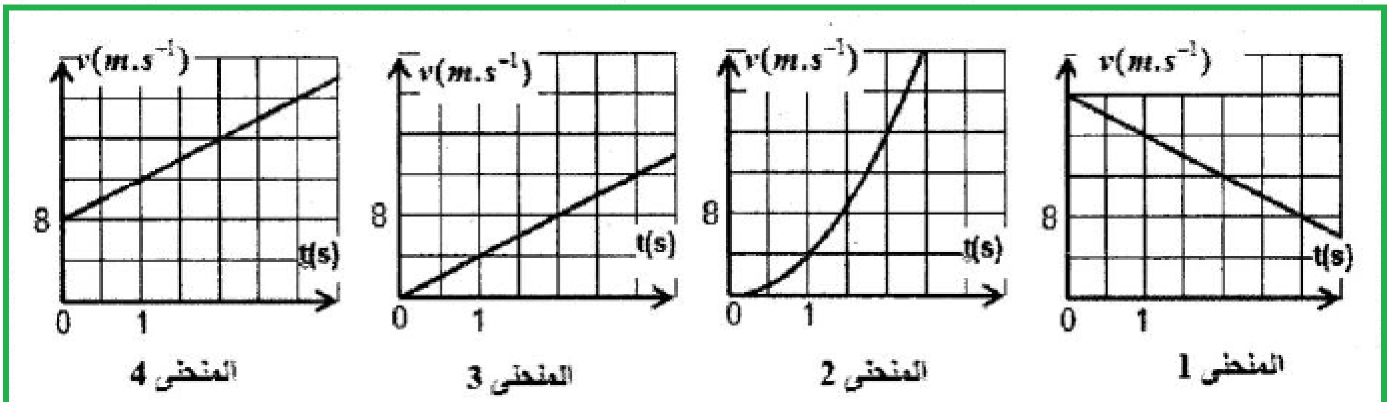
الإسقاط على المحور $(B,\vec{i})$:

$$0 + 0 + F = m.a_G$$

$$a_G = \frac{F}{m} = Cte$$

طبيعة حركة مركز القصور: حركة مستقيمية متغيرة بانتظام.

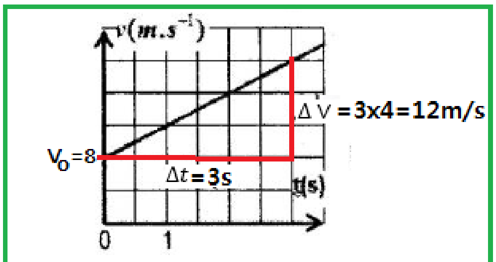
1-2- أ- تعيين المنحنى الذي يمثل السرعة اللحظية $v_G(t)$:



الشكل 2

سرعة الحركة المستقيمية المتسارعة بانتظام عبارة عن دالة تآلفية تزايدية $(v = a_G.t + v_0)$

ويتعلق الامر بالمنحنى 4.



1-2-ب- استنتاج قيمة v_0 و a_G :

حسب المنحنى 4:

سرعة G عند $t = 0$ هي : $v_0 = 8\ m.s^{-1}$

المعامل الموجه للمستقيم يكتب:

$$a_G = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3 \times 4}{3} = 4\ m.s^{-2}$$

1-3- حساب شدة القوة المحركة $\vec{F}$:

لدينا:

$$a_G = \frac{F}{m}$$

$$F = m.a_G$$

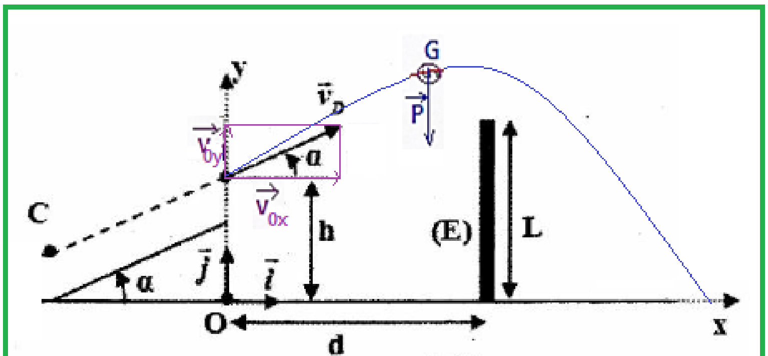
ت.ع:

$$F = 190 \times 4 = 760\ N$$

2- حركة المجموعة (S) خلال مرحلة القفز

2-1- إثبات المعادلتين التفاضليتين:

تخضع المجموعة (S) لقوة و حيدة الوزن $\vec{P}$.



الشكل 1

تطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\vec{P} = m.\vec{a}_G \Rightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G = \vec{g}$$

حسب الشروط البدئية:

$$\overrightarrow{OD}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{vmatrix} \text{ و } \vec{v}_0\begin{vmatrix} V_{0x} = v_D.cos\alpha \\ V_{0y} = v_D.sin\alpha \end{vmatrix}$$

إسقاط العلاقة $(\vec{a}_G = \vec{g})$ في المعلم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\vec{a}_G\begin{vmatrix} a_G = 0 \\ a_G = -g \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -g \end{vmatrix} \xRightarrow{\text{تكامل}} \vec{v}_G\begin{vmatrix} v_x = V_{0x} \\ v_y = -g.t + V_{0y} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v}_G\begin{vmatrix} v_x = v_D.cos\alpha \\ v_y = -g.t + v_D.sin\alpha \end{vmatrix}$$

نستنتج المعادلتين التفاضليتين:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx_G}{dt} = v_D.cos\alpha \\ \dfrac{dy_G}{dt} = -g.t + v_D.sin\alpha \end{vmatrix}$$

2-2- تحديد قيمة الارتفاع h و السرعة v_D :

حسب التعبير العددي للمعادلتين الزمنيتين:

$x_G(t) = 22,5.t \quad (1)$ ، $y_G(t) = -5t^2 + 11.t + 5 \quad (2)$

عند اللحظة $t = 0$ لدينا : $y_G(0) = h$ نعوض $t = 0$ في المعادلة (2) نحصل على: $y_G(0) = 5\ m$

إذن : $h = 5m$

لدينا:

$\frac{dx_G}{dt} = v_D.cos\alpha$ نشتق المعادلة (1) بالنسبة للزمن نحصل على : $\frac{dx_G}{dt} = 22,5\ m.s^{-1}$

إذن:

$$v_D.cos\alpha = 22,5 \quad \Rightarrow v_D = \frac{22,5}{cos\alpha}$$

ت.ع:

$$v_D = \frac{22,5}{\cos(26°)} = 25\, m.s^{-1}$$

2-3- التحقق من ان القفزة تمت بنجاح ام لا:

نبحث عن الارتوب $y_G(d)$ ثم نتحقق من العلاقة : $y_G(d) > L + 0,6\, m = 10 + 0,6 = 10,6m$

نبحث أولا عن معادلة المسار، نحصل عليها بإقصاء الزمن t المعادلتين الزمنية (1) و (2) :

$(1) \Rightarrow t = \frac{x_G}{22,5}$ نعوض t في المعادلة (2) نحصل على :

$$y_G(x_G) = -5\left(\frac{x_G}{22,5}\right)^2 + 11.\frac{x_G}{22,5} + 5 \quad (3)$$

نعوض الافصول $x_G = d = 20m$ في معادلة المسار (3)

$$y_G(d) = -5 \times \left(\frac{20}{22,5}\right)^2 + 11 \times \frac{20}{22,5} + 5 \approx 10,83\, m$$

نلاحظ ان العلاقة $y_G(d) > 10,6m$ تتحقق و بالتالي القفزة تمت بنجاح.

تمرين 3: تحديد لزوجة زيت محرك السيارة

يلعب زيت المحرك دورا مهما وأساسيا في التقليل من الاحتكاكات بين مكونات المحرك الداخلية عند اشتغاله تخاف الزيوت من حيث لزوجتها.

لتحديد لزوجة زيت المحرك ننجز تجربة السقوط الرأسي لكرية في الزيت ونقوم بتصوير حركتها بواسطة كاميرا رقمية ونحلل شريط الفيديو بواسطة برنام مناسب فنحصل على تغيرات السرعة بدلالة الزمن.

ندرس حركة الكرية في الزيت في معلم مرتبط بالأرض حيث محور الأناسيب رأسي ومنحاه نحو الأسفل.

المعطيات:

كتلة الكرية $m = 35\, g$

حجم الكرية $V = 33,5\, cm^3$

الكتلة الحجمية للزيت $\rho_f = 0,91\, g.cm^{-3}$

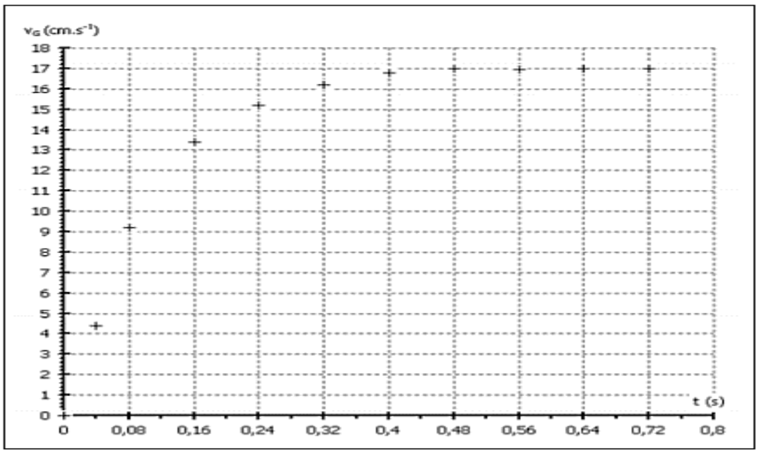
شدة الثقالة $g = 9,81\, m.s^{-2}$

قوة الاحتكاك المائع $\vec{f} = -k.\vec{V}$

حيث $\vec{V}$ متجهة سرعة مركز قصور الكرية

k ثابتة تعبيرها $k = 6\pi.\eta.R$ و η لزوجة الزيت.

دافعة أرخميدس $\vec{F}_A = -\rho_f.V.\vec{g}$



1-الدراسة التجريبية لحركة الكرية:

1-1-ما طبيعة حركة الكرية أثناء سقوطها في النظام الدائم.

1-2-حدد مبيانيا السرعة الحدية للكرية.

1-3-حدد مبيانيا الزمن المميز للحركة.

1-4-استنتج التسارع البدئي.

2-الدراسة النظرية:

2-1-بتطبيق القانون الثالث لنيوتن بين أن تعبير المعادلة التفاضلية هو $\frac{dv}{dt} = A - B.v$ محدد تعبير A و B .

2-2-يمثل الشكل جانبه قيم التسارع والسرعة لمركز قصور الكرية عند لحظات مختلفة.

باستعمال طريقة أولير ، حدد قيمة a_0 و a_3 و V_3.

نعطي $A = 1,27\ S.I$ و $B = 7,5\ s^{-1}$

$t(s)$	0	$0,080$	$0,16$	$0,24$	$0,32$
$a(m.s^{-2})$	a_0	$0,51$	020	a_3	$0,03$
$V\ (m.s^{-1})$	0	$0,102$	$0,102$	V_3	$0,165$

3-تحديد لزوجة الزيت:

3-1 أحسب η لزوجة الزيت.

3-2-حدد اسم زيت المحرك المدروس من بين الزيوت الموجودة في الجدول التالي:

	زيت المحرك عند $20°C$		
	$SAE\ 10$	$SAE\ 30$	$SAE\ 50$
$\eta\ (Pa.s)$	$0,088$	$0,290$	$0,700$

تصحيح التمرين 2:

1-الدراسة التجريبية:

1-1-سقوط الكرية يتم على مرحلتين:

- المرحلة الأولى، تتزايد السرعة تدريجيا (نظام انتقالي)
- المرحلة الثانية: تبقى السرعة ثابتة حركة مستقيمية منتظمة (نظام دائم)

1-2-السرعة الحدية:

$$V_{lim} = 17\ cm/s$$

1-3-الزمن المميز للحركة:

$$V(\tau) = 0,63\ V_{lim} = 0,63 \times 17 = 10,71\ cm/s$$

أفصول $10,71\ cm/s$ هو: $\tau \approx 0,12\ s$

1-4-التسارع البدئي:

$$a_0 = \frac{V_{lim}}{\tau}$$

$$a_0 = \frac{17.10^{-2}}{0,12} \approx 141,66.10^{-2}\ m/s^2$$

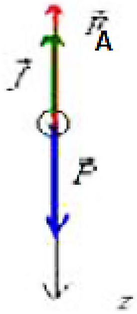
$$a_0 \approx 1,42.10^{-2}\ m/s^2$$

2-الدراسة النظرية:

2-1 -التحقق من العادلة التفاضلية:

تخضع الكرية أثناء حركتها إلى ثلاثة قوى:

$\vec{P}$: وزنها ، $\vec{F_A}$: دافعة أرخميدس و $\vec{f}$ قوة احتكاك المائع



نطبق القانون الثاني لنيوتن في معلم مرتبط بالأرض نكتب:

$$\vec{P}+\vec{F}_A+\vec{f}=m.\vec{a}_G$$

نسقط العلاقة على المحور Oz:

$$P-F_A-f=m.a$$

$$m.g-k\,v-\rho_f.V.g=m.\frac{d\,v}{dt}$$

$$\frac{d\,v}{dt}=g\left(1-\frac{\rho_f.V}{m}\right)-\frac{k}{m}.v$$

نضع : $B=\frac{k}{m}$ و $A=g\left(1-\frac{\rho_f.V}{m}\right)$

المعادلة التفاضلية تكتب: $\frac{dv}{dt}=A-B.v$

2-2-تحديد قيم a_0 وv_3 و a_3:

المعادلة التفاضلية تكتب: $a=A-B\,v$

عند $t=0$ المعادلة تكتب: $a_0=A-B\,v_0$ مع $v_0=0$ و $A=1,27\ m/s^2$

إذن: $a_0=1,27\ m/s^2$

باستعمال طريقة أولير:

$$v_3=v_2+a_2.\Delta t$$

باستعمال نتائج الجدول : $v_3=0,143+0,2\times 0,08$

$$v_3=0,077\ m/s$$

عند اللحظة t_3 المعادلة تكتب: $a_3=A-B\,v_3$

$$a_3=1,27-7,5\times 0,077=0,077\ m/s^2$$

3-تحديد لزوجة الزيت:

3-1-حساب η:

لدينا: $B=\frac{k}{m}=\frac{6\pi.\eta.R}{m}$

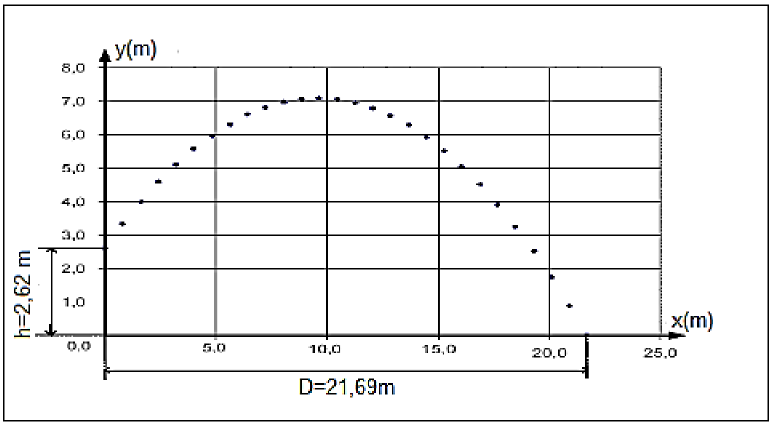
$$6\pi.\eta.R=B.m\ \Rightarrow \eta=\frac{B.m}{6\pi.R}$$

$$\eta=\frac{7,5\times 35.10^{-3}}{6\pi\times 2.10^{-2}}=0,7\ \ (SI)$$

3-2-اسم زيت المحرك المستعمل:

حسب الجدول اسم الزيت هو $SAE\ 50$

تمرين 3: دراسة حركة مركز قصور الجلة



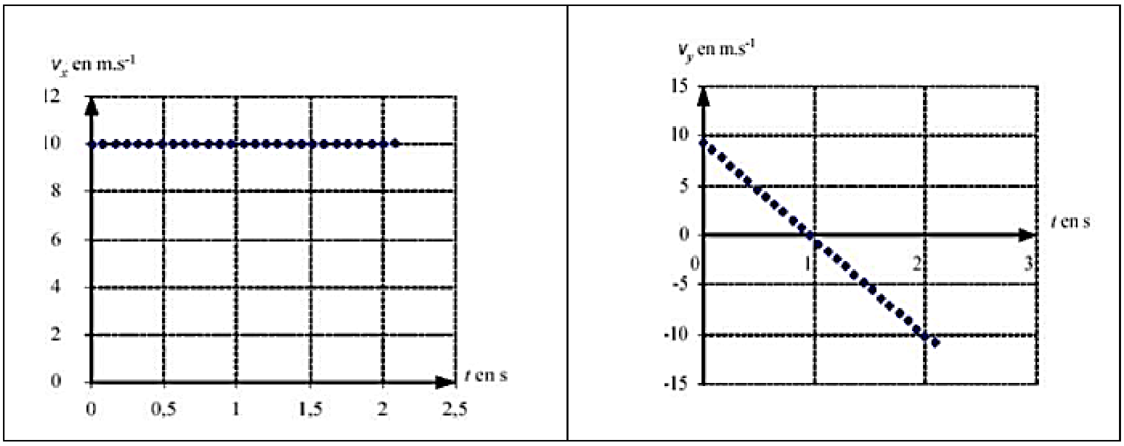
في بطولة العالم لسنة 2003 استطاع اللاعب البيلاروسي (Andrey mikhnevich) من نيل المرتبة الأولى في رمي الجلة مسجلا مسافة $D = 21,69\ m$.

يهدف هذا التمرين لدراسة حركة الجلة بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I-الدراسة التجريبية:

يمثل الشكل 1 مسار مركز قصور الجلة.

نحصل بواسطة برنام مناسب على منحنى تغيرات V_x بدلالة الزمن و V_y بدلالة الزمن.



1-حدد مبيانيا V_{0x} و V_{0y}.

2-بين ان $V_0 = 13,7\ m/s$ و $\alpha = 43°$.

3-ما طبيعة حركة الجلة على المحور الأفاصيل ثم على محور الأراتيب.

II-الدراسة النظرية:

1-بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين ان المعادلات الزمنية لحركة الجلة تكتب على الشكل التالي:

$$x(t) = V_0.\cos\alpha.t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin\alpha.t + h$$

2-استنتج معادلة المسار.

3-احسب المدة الزمنية المستغرقة لسقوط الجلة على الأرض.

4-حدد السرعة التي تصل بها الجلة إلى سطح الأرض.

تصحيح التمرين 3:

I-الدراسة التجريبية:

1-حدد مبيانيا V_{0x} و V_{0y}:

$V_{0y} = 9\ m/s$ و $V_{0x} = 10\ m/s$

2-إثبات قيمة V_0 و α:

$$V_0 = \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}$$

ت.ع : $V_0=\sqrt{10^2+9^2}=13,7\ m/s$

لدينا:

$$tan\alpha=\frac{V_{0y}}{V_{0x}}=\frac{9}{10}=0,9$$

أي: $\alpha=43°$

3-طبيعة حركة الجلة:

على محور الأفاصيل حركة مستقيمية منتظمة.

على محور الأراتيب حركة مستقيمية متغيرة بانتظام.

II-الدراسة النظرية:

1-المعادلات الزمنية:

تخضع الجلة أثناء حركتها للوزن $\vec{P}$ فقط.

حسب القانون الثاني لنيوتن نكتب : $\vec{P}=m.\vec{a}_G$

أي: $m.\vec{g}=m.\vec{a}_G$

$$\vec{a}_G=\vec{g}$$

الإسقاط على المحور Ox و على المحور Oy:

$$\vec{a}_G\begin{cases}a_x=0\\a_y=-g\end{cases}\Longrightarrow\vec{a}_G=\frac{d\vec{V}_G}{dt}\Longrightarrow\vec{a}_G\begin{cases}a_x=\dfrac{dV_x}{dt}=0\\a_y=\dfrac{dV_y}{dt}=-g\end{cases}\xrightarrow{\text{تكامل}}$$

$$\vec{V}_G\begin{cases}V_x=V_{0x}=V_0.cos\alpha\\V_y=-g.t+V_{0x}=-g.t+V_0.sin\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}V_x=\dfrac{dx}{dt}=V_0.cos\alpha\\V_y=\dfrac{dy}{dt}=-g.t+V_0.sin\alpha\end{cases}\xrightarrow{\text{تكامل}}\begin{cases}x=V_0.cos\alpha.t+x_0\\y=-\dfrac{1}{2}g.t^2+V_0.sin\alpha.t+y_0\end{cases}$$

حسب الشروط البدئية:

$y_0=h$ و $x_0=0$

$V_{0x}=V_0.sin\alpha$ و $V_{0x}=V_0.cos\alpha$

المعادلتان الزمنيتان هما : $x(t)=V_0.cos\alpha.t$ و $y(t)=-\frac{1}{2}g.t^2+V_0.sin\alpha.t+h$

2-معادلة المسار:

نقصي الزمن من المعادلتين الزمنيتين: $t=\frac{x}{V_0.cos\alpha}$ نعوض في y

$$y=-\frac{1}{2}g.\left(\frac{x}{V_0.cos\alpha}\right)^2+V_0.sin\alpha.\frac{x}{V_0.cos\alpha}+h$$

$$y = -\frac{g}{2\,V_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + x.\tan\alpha + h$$

3-المدة الزمنية المستغرقة لسقوط الجلة على الأرض:

إحداثيات نقطة سقوط الجلة على الأرض هما: $(D;0)$ المعادلة الزمنية للأفصول تكتب:

$$x = D = V_0.\cos\alpha.t$$

$$t = \frac{D}{V_0.\cos\alpha}$$

$$t = \frac{21}{13,7 \times \cos(43°)} = 2,16\ s$$

4-السرعة التي تصل بها الجلة إلى سطح الأرض:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \Longrightarrow V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

مع :

$$\begin{cases} V_x = V_0.\cos\alpha \\ V_y = -g.t + V_0.\sin\alpha \end{cases}$$

ت.ع:

$$V_x = 13,7\cos(43°) = 10,02\ m/s$$
$$V_y = -9,81 \times 2,16 + 13,7\sin(43°) = -11,85\ m/s$$

$$V = \sqrt{(10,02)^2 + (-11,85)^2} = 15,52\ m/s$$