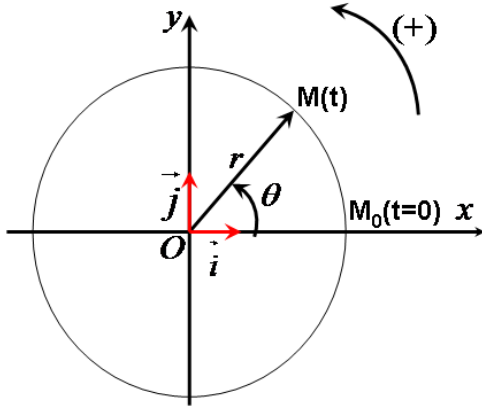


حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت**7**Mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe fixeI – المقادير الحرة المميزة لحركة الدوران : (الأفصول الزاوي ، السرعة الزاوية ، التسارع الزاوي)

حركة الدوران : يكون جسم صلب غير قابل للتشويه في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) إذا كانت جميع نقاطه في حركة دائرية مركزية على هذا المحور باستثناء النقاط المنتمية للمحور (Δ).

1 – الأفصول الزاوي : abscisse angulaire

الأفصول الزاوي لنقطة متحركة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) هو الزاوية الموجهة θ حيث :



$$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$$

الأفصول المنحني :

$$s(t) = M_0M$$

$$s(t) = r \cdot \theta(t)$$

2 – السرعة الزاوية

تساوي السرعة الزاوية لنقطة متحركة من جسم صلب في دوران حول محور ثابت في كل لحظة المشتقة بالنسبة للزمن للأفصول الزاوي

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{في هذه النقطة :}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) = \frac{d\theta}{dt} = R \cdot \dot{\theta}$$

❖ العلاقة بين السرعة الخطية و السرعة الزاوية :

$$v = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt} R\theta(t) = R \cdot \frac{d\theta}{dt} = R \cdot \dot{\theta}$$

$$v = R \cdot \dot{\theta}$$

2 – التسارع الزاوي : accélération angulaire

يساوي التسارع الزاوي لنقطة متحركة من جسم صلب في دوران حول محور ثابت في كل لحظة المشتقة بالنسبة للسرعة الزاوية في هذه النقطة.

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

❖ التسارع في أساس فرييني :

$$\vec{a} = a_t \vec{\tau} + a_n \vec{n}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} r \dot{\theta} = r \ddot{\theta}$$

a_t : التسارع المماسي :

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(r \dot{\theta})^2}{r} = r \dot{\theta}^2$$

a_n : التسارع المنظمي :

II – العلاقة الأساسية للتحريك في حالة الدوران حول محور ثابت :

❖ نص العلاقة :

في معلم مرتبط بجسم مرجعي أرضي ، بالنسبة لمحور ثابت (Δ) يساوي مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت في كل لحظة جداء عزم القصور J_Δ و التسارع الزاوي للجسم :

$$\sum M(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

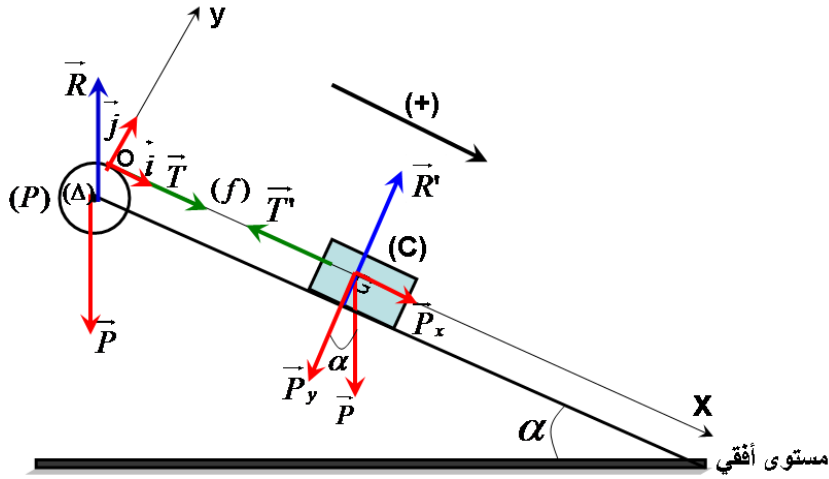
❖ تطبيق :

نعتبر مجموعة ميكانيكية (S) مكونة من :

- بكرة متجانسة (P) شعاعها r و كتلتها m_0 قابل للدوران حول محورها (Δ) الأفقي و الثابت.

- جسم صلب (C) كتلته m مستوى مائل بزاوية α .

- خيط (f) غير قابل للامتداد و كتلته مهملة و ملفوف حول مجرى بكرة و طرفه الأخر مشدود بالجسم (C) :



نحرر المجموعة فينزلق الجسم (C) نحو الأسفل.

➤ عبر عن تسارع المجموعة بدلالة m_0 ، m ، α ، g ؟

❖ دراسة حركة البكرة (P) :

- المجموعة المدروسة : (P) (البكرة)

جهد القوى المطبقة على البكرة

\vec{P} : وزن البكرة

\vec{R} : تأثير محور الودان (Δ)

\vec{T} : القوة المطبقة من طرف الخيط

بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك في حالة دوران :

$$\sum M(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{T}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

لأن خط تأثير القوتين يتطابق مع محور الدوران :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

$$M_{\Delta}(\vec{T}) = T \cdot r$$

$$T = \frac{J_{\Delta} \ddot{\theta}}{r}$$

❖ دراسة حركة الجسم (C):

- المجموعة المدروسة : { الجسم (C) }

جهد القوى المطبقة على الجسم (C) :

\vec{P}' : وزن الجسم (C)

\vec{R}' : تأثير السطح المائل

\vec{T}' : القوة المطبقة من طرف الخيط

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum M(\vec{F}_{ext}) = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\vec{P}' + \vec{R}' + \vec{T}' = m \vec{a}$$

نسقط العلاقة المتجهة على محاور المعلم : $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

وفق المحور (O, \vec{j}) :

$$\vec{P}'_y + \vec{R}'_y + \vec{T}'_y = m \vec{a}_y$$

$$-P_y + R_y + 0 = 0$$

$$\text{مع } R = R_y \text{ و } P_y = P \cdot \cos \alpha = mg \cos \alpha$$

$$\boxed{R = P_y = mg \cos \alpha}$$

وفق المحور (O, \vec{i}) :

$$\vec{P}'_x + \vec{R}'_x + \vec{T}'_x = m \vec{a}_x$$

$$P_x + 0 - T' = ma$$

$$\text{مع } P_x = mg \sin \alpha$$

$$\boxed{T' = m(g \sin \alpha - a)}$$

$$T = T'$$

بما أن الخيط غير قابل للامتداد فإن :

$$mg \sin \alpha - ma = \frac{J_{\Delta}}{r}$$

$$a = r \cdot \ddot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{a}{r}$$

بما أن الخيط لا ينزلق على مجرى البكرة فإن :

$$mg \sin \alpha - ma = \frac{m_0 r^2 \cdot a}{2 \cdot r^2}$$

$$\text{فإن : } J_{\Delta} = \frac{1}{2} m_0 r^2$$

$$mg \sin \alpha = \frac{m_0}{2} a + ma$$

$$a \left(\frac{m_2}{2} + m \right) = mg \cdot \sin \alpha$$

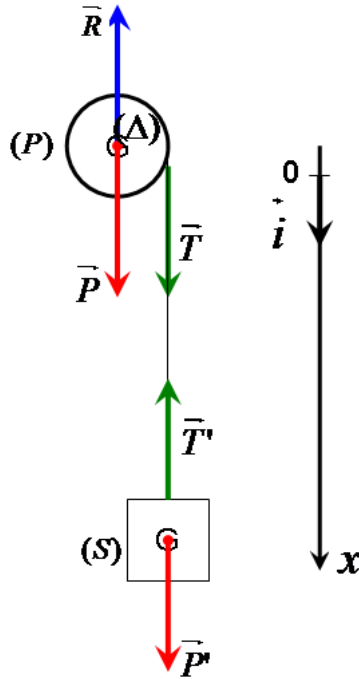
$$a \left(\frac{1}{2} \frac{m_0}{m} + 1 \right) = g \cdot \sin \alpha$$

$$a = \frac{g \sin \alpha}{\left(\frac{m_0}{2m} + 1 \right)} = cte$$

إذن حركة (C) مستقيمة متغيرة بانتظام

❖ تطبيق:

نعتبر بكرة (P) متباطنة كتلتها $m_C = 2kg$ شعاعها $r = 10cm$ قابلة للدوران حول ثابت أفقي (Δ) يمر من مركزها. ونعلق في طرف الخيط غير القابل للامتداد و ملفوف حول البكرة جسما صلبا (S) كتلته $m_S = 1kg$ نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية القيمة المطلقة لعزم المزدوجة المقاومة الناتجة عن الاحتكاك و المطبق على محور الأسطوانة : $M_C = 0,38N$



1 - أوجد تعبير التسارع الزاوي للأسطوانة بدلالة M_C و r و J_Δ و T_0 ؟

2 - حدد طبيعة حركة الجسم (S) ؟

3 - أحسب قيمة تسارع الجسم (S) ثم استنتج التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ ل (P) ؟

1 - المجموعة المدروسة : (P) (البكرة)

جرد القوى المطبقة على البكرة

\bar{P} : وزن البكرة

\bar{R} : تأثير محور الدوران (Δ)

\bar{T} : القوة المطبقة من طرف الخيط

M_C : عزم مزدوجة الاحتكاك .

بتطبيق العلاقة الأساسية لديناميك في حالة دوران :

$$\sum M(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{T}) + M_C = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

لأن خط تأثير القوتين يتطابق مع محور الدوران :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

$$M_{\Delta}(\vec{T}) = T \cdot r$$

و باعتبار المنحى الموجب للدوران :

$$T \cdot r - M_C = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$$T = \frac{J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} + M_C}{r}$$

\Leftrightarrow

$$\ddot{\theta} = \frac{T \cdot r - M_C}{J_{\Delta}}$$

2 - المجموعة المدروسة : $\{S\}$ الجسم

جهد القوى المطبقة على الجسم (S) :

\vec{P}' : وزن الجسم (S)

\vec{T}' : القوة المطبقة من طرف الخيط

$$\sum M(\vec{F}_{ext}) = m \cdot \vec{a}$$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P}' + \vec{T}' = m \vec{a}$$

نسقط العلاقة المتجهة على محور المعلم : (O, i) :

$$P' - T' = m_s a$$

$$m_s g - T' = m_s a$$

\Rightarrow

$$T' = m_s g - m_s a$$

بما أن الخيط غير قابل للامتداد فإن :

$$m_s g - m_s a = \frac{J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}}{r} + \frac{M_C}{r}$$

$$a = r \cdot \ddot{\theta}$$

\Rightarrow

$$\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$$

بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة فإن :

$$m_s g - m_s a = \frac{J_{\Delta} \cdot a}{r^2} + \frac{M_C}{r}$$

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} m_C \cdot r^2$$

و نعلم أن :

$$m_s g - m_s a = \frac{m_C \cdot r^2}{2r^2} a + \frac{M_C}{r}$$

$$a \left(m_s + \frac{m_C}{2} \right) = m_s g - \frac{M_C}{r}$$

$$a = \frac{m_s g - \frac{M_c}{r}}{m_s + \frac{m_c}{2}}$$

$$a = \frac{1.9,8 - \frac{0,38}{0,1}}{1 + \frac{2}{2}} = 3m.s^{-2}$$

بما أن $a = cte$ فإن طبيعة الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام (متسارعة)

$$\ddot{\theta} = \frac{a}{r} = \frac{3}{0,1} = 30rad.s^{-2}$$

3 – التسارع الزاوي :

المعجم العلمي

Ressort

Rotation

Angulaire

Dérivé

Composante

Relation fondamentale

Tige

Poulie

نابض

دوران

زاوي

مشتقة

مركبة

العلاقة الاساسية

ساق

بكرة

Disque

Eclateur

Abscisse

Accélération

Moment

Inertie

Couronne

Cylindre

قرص

مفجر

أفصول

تسارع

عزم

قصور

حلقة

أسطوانة