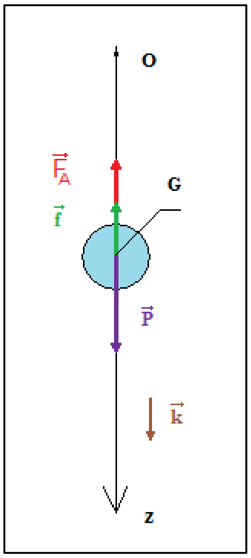
السقوط الرأسي بالإحتكاك

(خاص بالعلوم الفيزيائية والرياضية)



I-القوى المطبقة على جسم من طرف مائع :

القوى المطبقة من طرف مائع :

الجسم المغمور في مائع يخضع لثلاث قوى :
-قوة الثقالة أو وزن الجسم $\vec{P}$.
-دافعة أرخميدس $\vec{F}_A$.
-قوة الاحتكاك المائع $\vec{f}$.

1-قوة الثقالة :

تخضع الأجسام في مجال الثقالة الى قوة الثقالة ، وهي القوة المطبقة عليها من طرف الأرض وتسمى بالوزن $\vec{P}$. $\vec{P} = m\vec{g}$
اتجاهها أسي ومنحاها نحو الأسفل وشدتها :

$$P = m.g = \rho.V.g$$

m كتلة الجسم (kg)
ρ كتلته الحجمية $(kg.m^{-3})$
V حجمه (m^3)
g شدة الثقالة $(N.kg^{-1})$

2-دافعة أرخميدس :

يخضع كل جسم مغمور في مائع لقوة تماس ضاغطة تسمى دافعة أرخميدس ، اتجاهها راسي ومنحاها نحو الأعلى ، شدتها تساوي وزن المائع المزاح . $\vec{F}_A = -\rho_0.V.\vec{g}$

$$F_A = \rho_0.V.g$$

F_A دافعة أرخميدس (N)
ρ_0 الكتلة الحجمية للمائع $(kg.m^{-3})$
V حجم الجسم المغمور (m^3)
g شدة الثقالة $(N.kg^{-1})$

3-قوة الاحتكاك المائع :

تكافئ قوى الاحتكاك التي يطبقها المائع على الجسم المغمور داخله قوة وحيدة $\vec{f}$ تسمى قوة الاحتكاك المائع تطبق في مركز القصور G للجسم ومنحاها معاكس لمتجهة السرعة : $\vec{f} = -k\vec{v}^n$
منظمها : $f = k.v^n$
$n = 1$ في حالة السرعة صغيرة.
$n = 2$ في حالة السرعة كبيرة .
k تتعلق بنوعية المائع وبشكل الجسم .

ملحوظة :

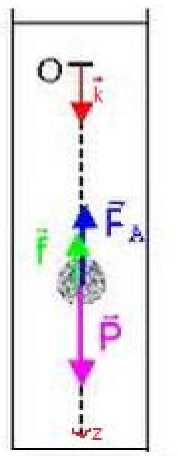
لمقارنة وزن الجسم أمام دافعة أرخميدس نحدد النسبة :

$$\frac{F_A}{P} = \frac{\rho_0.V.g}{\rho.V.g} = \frac{\rho_0}{\rho}$$

في حالة $\rho \gg \rho_0$ نهمل دافعة أرخميدس أمام وزن الجسم .

II-السقوط الرأسي باحتكاك :

1-المعادلة التفاضلية :



المجموعة المدروسة {الكرية }

جرد القوى : تخضع الكرية للقوى التالية :

- $\vec{P}$:وزنها $\vec{P} = m\vec{g}$
- $\vec{F}_A$: دافعة أرخميدس $\vec{F}_A = -\rho_0.V.\vec{g}$
- $\vec{f}$: قوة الاحتكاك المائع $\vec{f} = -k\vec{v}^n$

تطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرية :

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

$$m\vec{g} - \rho_0.V.\vec{g} - k\vec{v}^n = m.\vec{a}_G$$

نسقط العلاقة على المحور oz :

$$mg - \rho_0 Vg - kv^n = ma$$

التسارع يكتب $a = \frac{dv}{dt}$ تكتب :

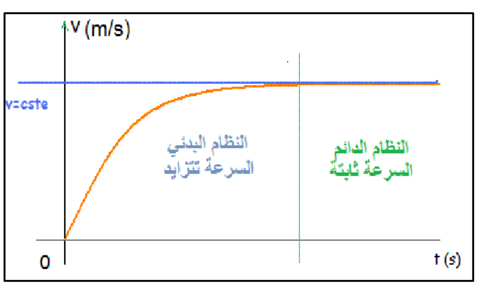
$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{\rho_0 V}{m}\right) - \frac{k}{m}v^n$$

المعادلة التفاضلية تكتب :

$$\boldsymbol{\frac{dv}{dt} + Av^n = B} \quad \text{مع :} \quad \begin{cases} A = \frac{k}{m} \\ B = g\left(1 - \frac{\rho_0 V}{m}\right) \end{cases}$$

2-المقادير المميزة للحركة :

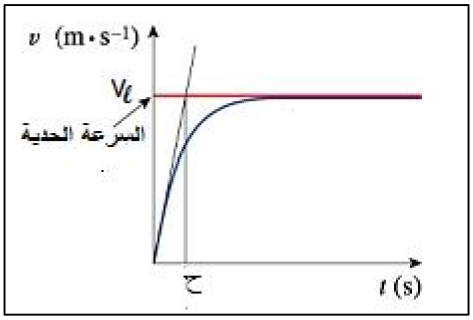
2.1-النظام الإنتقالي والنظام الدائم :



في البداية تتزايد سرعة الكرية الى أن تبلغ قيمة ثابتة تسمى السرعة الحدية v_ℓ فتخضع حركة الكرية الى نظام يسمى النظام الدائم حيث تكون حركتها مستقيمية منتظمة .

في النظام الانتقالي تكون حركة الكرية مستقيمية متغيرة .

2.2-السرعة الحدية v_ℓ :



نحددها مبيانيا باستغلال مخطط السرعة أنظر الشكل جانبه .
يمكن تحديدها باستعمال المعادلة التفاضلية :
عند $v = v_\ell$ لدينا $\frac{dv}{dt} = 0$ أي: $Av_\ell^n = B$

$$v_\ell = \sqrt[n]{\frac{B}{A}} = \left[\frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho_0 V}{m}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

2.3-التسارع البدئي a_0 :

مبيانيا تساوي المعامل الموجه لمماس منحنى مخطط السرعة عند أصل التواريخ .
يمكن استعمال المعادلة التفاضلية باعتبار $v_0 = 0$ نكتب :

$$a_0 = B = g(1 - \frac{\rho_0 V}{m})$$

2.4-الزمن المميز τ للحركة :

يمثل مبيانيا نقطة أفصول نقطة تقاطع مماس منحنى مخطط السرعة عند اللحظة $t = 0$ مع المقارب الأفقي .
يمكن استعمال العلاقة : $a_0 = \frac{v_\ell}{\tau}$ أي: $\tau = \frac{v_\ell}{a_0}$

3-حل المعادلة التفاضلية باستعمال طرقة أولير :

طريقة أولير طريقة رقمية تكرارية تمكن من حل المعادلة التفاضلية . ويستوجب استعمال هذه الطريقة معرفة قيمة السرعة البدئية v_0 لمركز قصور الجسم في اللحظة t=0 .

المرحلة الأولى :

بمعرفة قيمة السرعة البدئية v_0 نحسب التسارع البدئي a_0 باستعمال المعادلة التفاضلية :

$$a_0 = B - Av_0^n \leftarrow a_i = B - Av_i^n$$

المرحلة الثانية :

نحسب السرعة v_1 عند اللحظة t_1 حيث : $t_1 = t_0 + \Delta t$ نسمي Δt خطوة الحساب .

$$v_1 = v_0 + a_0\Delta t \leftarrow v_{i+1} = v_i + a_i\Delta t$$

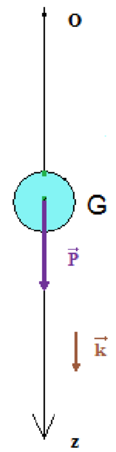
نكرر العمليتان لحساب a_1 باستعمال المعادلة التفاضلية و v_2 علاقة أولير .

ملحوظة :

اختبار خطوة الحساب Δt يكتسي أهمية بالغة في طريقة أولير ، فكلما كانت قيمة Δt صغيرة كلما كانت النتائج النظرية قريبة من النتائج التجريبية .
إذا كان هناك تطابق بين المنحنى التجريبي ومنحنى أولير النموذج الصحيح لقوة الاحتكاك الذي تم اختياره صحيحا($f = kv$ أو $f = kv^2$).

III-السقوط الحر :

1-تعريف :



يعتبر الجسم في سقوط حر إذا كان خاضعا لونه فقط.

2-دراسة السقوط الحر لجسم :

- المجموعة المدروسة {الكرية}
- جرد القوى : تخضع الكرية لوزنها $\vec{P}$ فقط حيث : $\vec{P} = m\vec{g}$
- نختار المعلم (Oz) موجها نحو الأسفل .
- تطبق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} = m\vec{a}_G$ أي : $m\vec{a}_G = m\vec{g}$

$\vec{a}_G = \vec{g}$

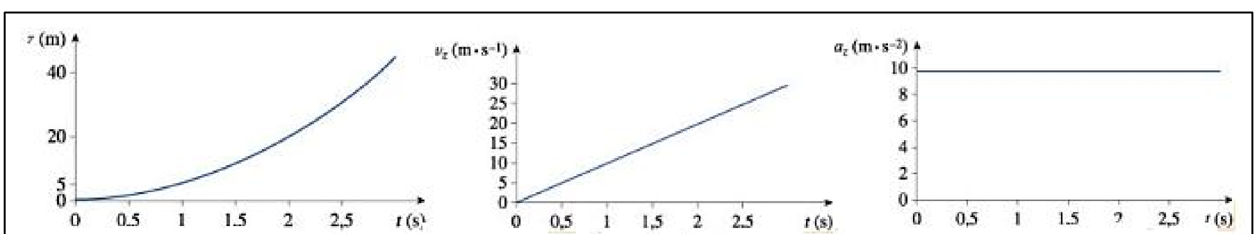
- الإسقاط على المحور (Oz)

المعادلة التفاضلية للسقوط الحر :

$$\frac{dv}{dt} = g$$

المعادلات الزمنية :

$$\begin{cases} a = g = cte & \text{: التسارع} \\ v = gt + v_0 & \text{: السرعة} \\ z = \frac{1}{2}gt^2 & \text{: الأنسوب} \end{cases}$$



مخطط المسافات | مخطط السرعة | مخطط التسارع