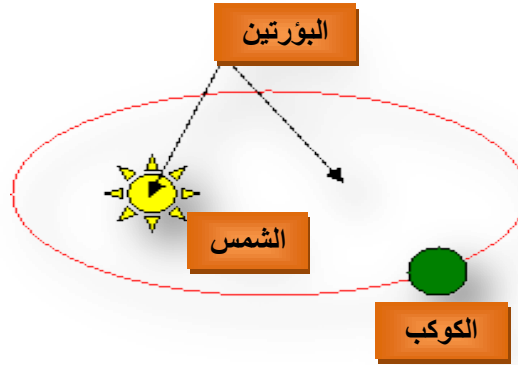


الحركات المستوية : حركة الكواكب و الأقمار الاصطناعية

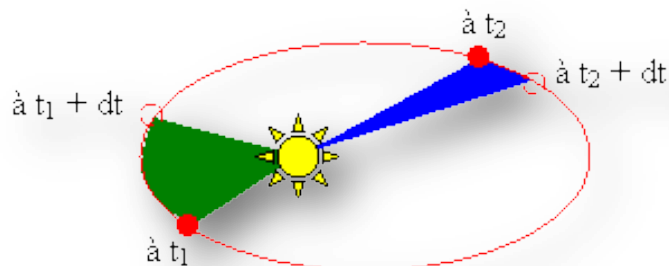


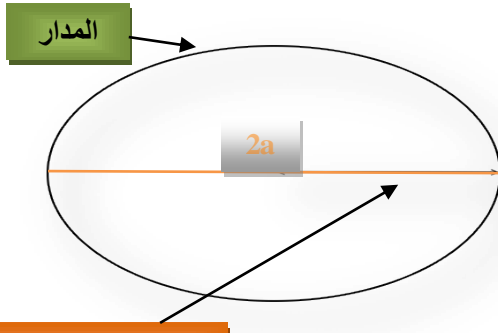
1 (قوانين كيبلر .
بين 1609 و 1618 نشر كيبلر (Kepler) في كتابه أسترونوميا نوفا ثلاثة قوانين اعتبرت ثورية آنذاك ، و مكنت من وصف حركة الكواكب حول الشمس .

1 - 1 (القانون الأول أو قانون المدارات .
في المرجع المركزي الشمسي ، مسار مركز قصور كوكب إهليلج (ellipse) ، حيث أحد بؤرتيه هو مركز الشمس .



2 - 1 (القانون الثاني أو قانون المساحات .
تكسح القطعة الرابطة بين مركز الشمس و مركز كوكب مساحات متقايسة خلال مدد متساوية .
هذا القانون يؤكد الملاحظة التي تقول بأن سرعة كوكب تكبر عند اقترابه من الشمس .





ا نصف المحور الكبير

1-3) القانون الثالث أو قانون الأديوار .
 لنعتبر T الدور المداري لكوكب (المدة الزمنية اللازمة لكي ينجز الكوكب دورة كاملة على مداره) و a طول نصف المحور الكبير لمداره .
 يتناسب مربع الدور المداري T لكوكب يدور حول الشمس مع مكعب طول نصف المحور الكبير a لمداره الإهليلجي .

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

k ثابتة لا تتعلق بكتلة الكوكب . قيمتها معبر عنها بوحدة $s^2 \cdot m^{-3}$ في النظام العالمي للوحدات .
 لنحسب k بالنسبة للأرض ثم بالنسبة للمشتري (Jupiter) و نقارن بين القيمتين :

$$T_{Terre} = 365 \text{ jours} \quad \text{و} \quad a_{Terre} = 150.10^6 \text{ km} \quad \bullet$$

$$k_{Terre} = 4,0.10^{-20} [\text{jours}^2 \cdot \text{km}^{-3}]$$

$$T_{Jupiter} = 4332 \text{ jours} \quad \text{و} \quad a_{Jupiter} = 780.10^6 \text{ km} \quad \bullet$$

$$k_{Jupiter} = 4,0.10^{-20} [\text{jours}^2 \cdot \text{km}^{-2}].$$

نجد :

$$k_{Terre} = k_{Jupiter}$$

بالنسبة لكواكب المجموعة الشمسية :

الكوكب	ا نصف المحور الكبير ب 10^3 km أو 10^6 m	T الدور المداري بالأيوم	T الدور المداري ب 10^6 s	T^2/a^3 $\text{jour}^2 \cdot \text{km}^{-3}$	T^2/a^3 $\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$
Mercure عطارد	57910	87,97	7,57984708	$3,98482.10^{-11}$	$2,95842.10^{-19}$
Vénus الزهرة	108200	224,7	19,3610508	$3,98588.10^{-11}$	$2,95921.10^{-19}$
Terre الأرض	149600	365,26	31,47226264	$3,98483.10^{-11}$	$2,95843.10^{-19}$
Mars المريخ	227940	686,98	59,19294472	$3,98498.10^{-11}$	$2,95855.10^{-19}$
Jupiter المشتري	778330	4332,71	373,3236244	$3,98133.10^{-11}$	$2,95583.10^{-19}$

بالنسبة لأقمار المشتري التي لاحظها غاليلي :

القمر	ا نصف المحور الكبير ب 10^3 km أو 10^6 m	T الدور المداري jour	T الدور المداري 10^6 s	T^2/a^3 $\text{jour}^2 \cdot \text{km}^{-3}$	T^2/a^3 $\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$
Io	422	1,77	0,15251028	$4,16878.10^{-8}$	$3,095.10^{-16}$
Europe	671	3,55	0,3058822	$4,17147.10^{-8}$	$3,097.10^{-16}$
Ganymède	1070	7,15	0,6160726	$4,17312.10^{-8}$	$3,09822.10^{-16}$
Callisto	1883	16,69	1,43807716	$4,17217.10^{-8}$	$3,09751.10^{-16}$

نلاحظ أن $\frac{T^2}{a^3}$ ثابتة ، لكن هذه الثابتة تتعلق بالجسم الجاذب . لدينا كما سنبين ذلك $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$ ، حيث G ثابتة التجاذب الكوني :

$$G = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{و} \quad M \text{ كتلة النجم أو الكوكب الجاذب}$$

أخذا بعين الاعتبار نتائج الجداول السابقة ، يمكن أن نحدد كتل الكواكب أو النجوم الجاذبة . نجد مثلا :

• بالنسبة للشمس : $M_s = 2,00.10^{30} \text{ kg}$

• بالنسبة للمشتري (Jupiter) : $M_j = 1,91.10^{27} \text{ kg}$

قوانين كيبلر تطبق سواء على الأقمار الطبيعية أو الاصطناعية لجرم سماوي (astre) .

بالنسبة لبعض أقمار الأرض :

القمر	a نصف المحور الكبير ب 10^3 km أو 10^6 m	T الدور المداري	T الدور المداري en s	T^2/a^3 $\text{s}^2.\text{m}^{-3}$
Lune	384	27,32 jours	$2,35.10^6$	$9,78632.10^{-14}$
Hipparcos	24,546	10h37min 57s	38277	$9,9068.10^{-14}$
NOAA 15	7,19	1h41min09s	6069	$9,90941.10^{-14}$
GPS BII-01	26,5625	11h58min08s	43088	$9,90617.10^{-14}$
Globalstar MO48	7,79	1h54min4s	6844	$9,90849.10^{-14}$

* ملحوظة : رغم أن كيبلر توصل إلى هذه القوانين اعتمادا على ملاحظات و حسابات ، فإننا اليوم يمكن أن نبرهن عليها .

2 (قوانين كيبلر في حالة مدار دائري .

يمكن اعتبار مسارات جل كواكب المنظومة الشمسية مسارات دائرية . في هذه الحالة بؤرتي الإهليلج متطابقتين :

- قانون المدارات يشير إلى كون المسار دائري مركزه هو مركز الشمس .
- قانون المساحات يشير إلى كون السرعة ثابتة : في هذه الحالة ، الكوكب له حركة دائرية منتظمة .
- قانون الأذوار يصير

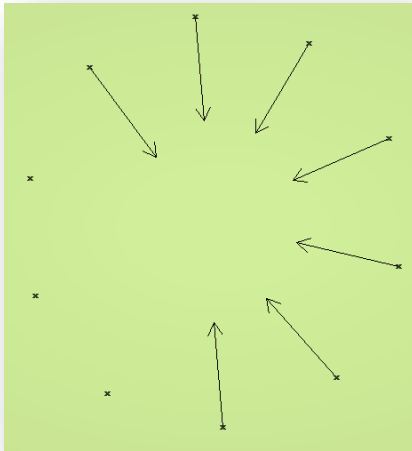
$$\frac{T^2}{r^3} = \text{Cste}$$

مع r شعاع المسار الدائري

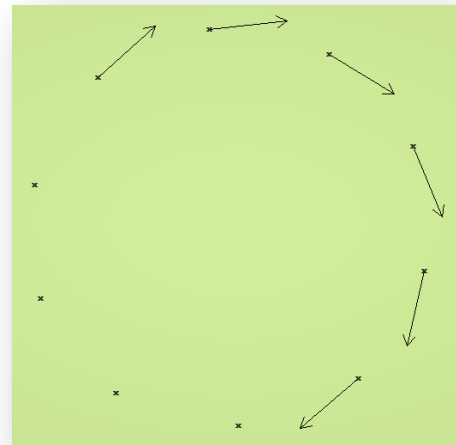
3 (الحصول على حركة دائرية منتظمة .

خلال دراسة حركة الكواكب و الأقمار ، نقتصر بدراسة حالة المسار الدائري فقط . كما لاحظنا في الفقرة 2 فإن قانون المساحات يشير إلى أن الحركة منتظمة في هذه الحالة .

1-3 (مميزات الحركة الدائرية المنتظمة .



تمثيل متجهة التسارع اللحظية

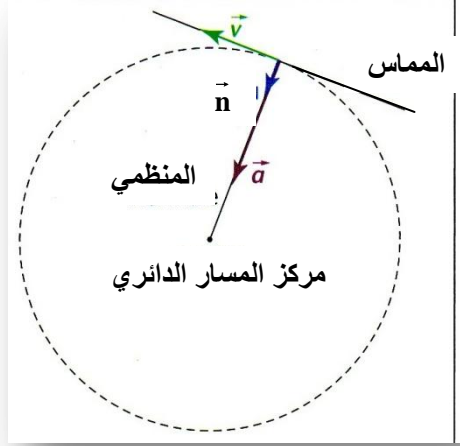


تمثيل متجهة السرعة اللحظية

- متجهة التسارع دائما متجهة نحو المركز الجاذب : نقول بأنها انجاذبية مركزية .
- متجهة السرعة و متجهة التسارع دائما متجهتين متعامدتين .

خلال حركة دائرية منتظمة ، متجهة التسارع لها التعبير : $\vec{a} = \frac{v^2}{r} \vec{n}$ (الإحداثي المماسي منعدم لأن $\frac{dv}{dt} = 0$)

حيث \vec{n} المتجهة الواحدة المنظمية لمعلم فريني



(2-3) الشروط الضرورية للحصول على حركة دائرية منتظمة .

في مرجع غاليلي ، تطبيق قانون نيوتن على مركز القصور G لجسم صلب كتلته m يعطي : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

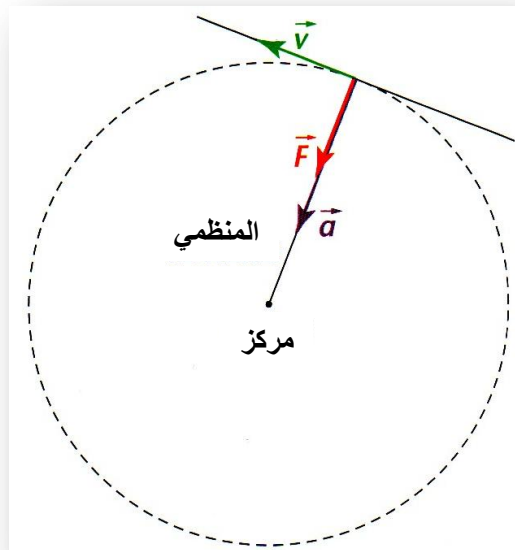
للحصول على حركة دائرية منتظمة ، يجب أن تكون \vec{a}_G انجاذبية مركزية و قيمتها $\frac{v^2}{r}$ ، اذن المتجهة $\sum \vec{F}_{ext}$ التي نرمل لها

اختصارا \vec{F} ، يجب أن تكون هي الأخرى انجاذبية مركزية و قيمتها $\frac{mv^2}{r}$

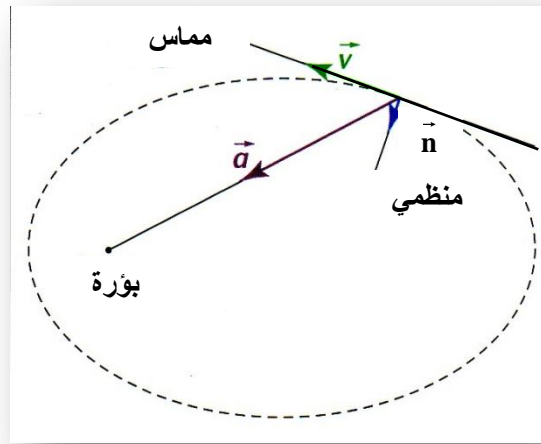
حركة مركز قصور جسم صلب كتلته m حركة دائرية منتظمة في مرجع غاليلي إذا كان :
المجموع المتجهي \vec{F} للقوى المطبقة عليه متجهة انجاذبية مركزية
منظم المتجهة \vec{F} ثابت و يحقق العلاقة

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

مع r شعاع المسار الدائري

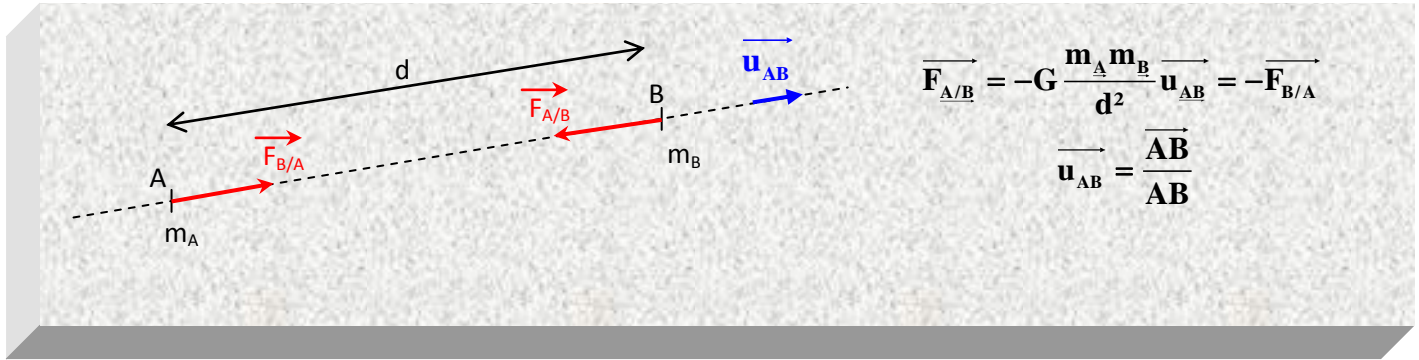


*** ملحوظة :** بواسطة برنم للمحاكات ، يمكن أن نتأكد أنه في حالة عدم تحقق العلاقة السابقة ، فإن المسار يمكن أن يكون إهليلجيا . في هذه الحالة ، متجهة التسارع دائما متجهة نحو أحد البورتين ، ولكن غير متعامدة مع متجهة السرعة .



4 (تذكير بقانون التجاذب الكوني .

في سنة 1687 توصل نيوتن إلى قانون يمكن من شرح حركة الكواكب و تفسير استنتاجات كيبلر ؛ إنه قانون التجاذب الكوني :
ننمدج التجاذب البيني الحاصل بين جسمين نقطيين A و B كتلتيهما بالتتابع m_A و m_B بقوتي الجذب $\vec{F}_{A/B}$ و $\vec{F}_{B/A}$ لهما المميزات التالية :



* قانون التجاذب الكوني يطبق كذلك على أجسام غير نقطية في الحالتين التاليتين :
• عندما يكون توزيع الكتلة له تماثل كروي . وهي حالة النجوم و الكواكب .
• عندما تكون أبعاد الجسم مهملة مقارنة مع المسافة الفاصلة بينه و بين الجسم الجاذب . وهي حالة مثلا قمر اصطناعي للأرض في هذه الحالة نعتبر القمر الاصطناعي نقطيا .
* كما تطرقنا لذلك في درس سابق ، يمكن اعتبار قوة التجاذب التي تطبقها الأرض على جسم ما هي وزن هذا الجسم .

5 (الحركة المدارية للكواكب .

تتم الدراسة في المرجع المركزي الشمسي ، الذي نعتبره ثابتا و غاليليا (الشمس تدور حول مركز المجرة خلال $2,26.10^8$ سنة) .

5-1 (تطبيق القانون الثاني لنيوتن .

لنعتبر كوكبا كتلته m و مركزه P يدور حول الشمس ذات الكتلة M_S و المركز S .

الجسمين خاضعين لقوتي التجاذب الكوني ، و بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكوكب نجد :

$$\vec{F}_{S/P} = -\frac{GM_S m}{r^2} \vec{u}_{SP} = m \vec{a}_P$$

و منه نكتب :

$$\vec{a}_P = -\frac{GM_S}{r^2} \vec{u}_{SP}$$

و بذلك فإن الشرط الأول للحصول على حركة دائرية منتظمة قد تحقق : القوة $\vec{F}_{S/P}$ المطبقة على الكوكب متجهة انجاذبية مركزية ،

كمتجهة التسارع \vec{a}_P .

لكي تكون الحركة دائرية منتظمة يجب كذلك أن يكون منظم $\vec{F}_{S/P}$ ثابت و يحقق :

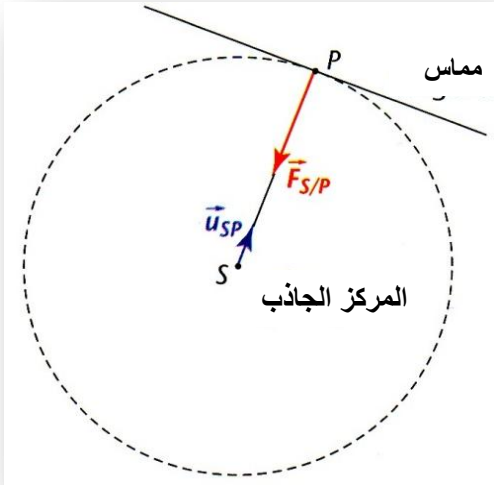
$$\vec{F}_{S/P} = \frac{m v^2}{r}$$

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM_s}{r^2}$$

و منه :

أي :

$$v = \sqrt{\frac{GM_s}{r}}$$



ختاما ،

في المرجع المركزي الشمسي ، تكون لكوكب حركة دائرية منتظمة حول الشمس على دائرة شعاعها r إذا حققت سرعته العلاقة التالية :

$$v = \sqrt{\frac{GM_s}{r}}$$

مع $M_s = 1,99.10^{30} \text{ kg}$ كتلة الشمس و $G = 6,67.10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ ثابتة التجاذب الكوني .

5 - 2) تعبير الدور المداري .

بما الحركة دائرية منتظمة فهي اذن دورية ، يمثل دورها المداري المدة الزمنية اللازمة لإنجاز دورة كاملة ($2\pi r$)

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_s}{r}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_s}}$$

و منه فإن :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM_s}$$

أي :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$

و بذلك فإن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ تساوي ثابتة ، لا تتعلق بالكوكب المدروس : نجد القانون الثالث لكيبلر بالنسبة لكوكب في حركة دائرية منتظمة حول الشمس .

الكوكب	T (10 ⁷ s)	r (10 ⁸ km)	$\frac{T^2}{r^3}$ (s ² .m ⁻³)
Vénus الزهرة	1,94	1,08	2,99.10 ⁻¹⁹
Terre الأرض	3,16	1,50	2,96.10 ⁻¹⁹
Mars المريخ	5,94	2,28	2,98.10 ⁻¹⁹
Jupiter المشتري	37,6	7,78	3,00.10 ⁻¹⁹

6 (تطبيق : الحركة المدارية لأقمار الأرض .

في حالة أقمار الأرض ، تتم الدراسة في المرجع المركزي الأرضي .

1 - 6 (تعبير السرعة و الدور المداري .

حركة القمر تكون دائرية منتظمة عندما تتوفر الشروط المذكورة في الفقرات السابقة ، و التي هي :

- القوة $\vec{F}_{T/S}$ المطبقة على القمر متجهة انجاذبية مركزية : و هي قوة جذب مطبقة من طرف الأرض ذات الكتلة M_T و الشعاع R_T .

$$F_{T/S} = \frac{m v^2}{r} \Leftrightarrow a = \frac{v^2}{r} \quad \bullet \quad \text{قيمة السرعة تحقق العلاقة :}$$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، يمكن استنتاج المميزات المدارية للأقمار .

في المرجع المركزي الأرضي ، يكون قمر في حركة دائرية منتظمة حول الأرض على دائرة شعاعها r بشرط أن تحقق سرعته العلاقة:

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r}}$$

مع $r = R_T + h$ حيث h ارتفاع القمر عن سطح الأرض .

$$\begin{aligned} R_T = 6,378.10^3 \text{ m} \quad \text{عند الأقطاب} \quad R_T = 6,356.10^3 \text{ m} \quad \text{عند خط الاستواء} \\ G = 6,67.10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2} \\ M_T = 5,974.10^{24} \text{ kg} \end{aligned}$$

و الدور المداري هو :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G M_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G M_T}}$$

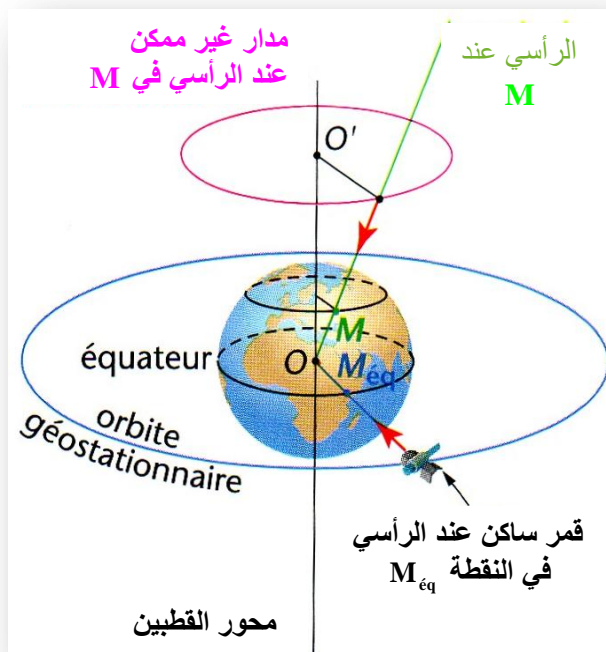
السرعة و الدور المداري لا يتعلقان بكتلة القمر ، بل فقط بارتفاعه .

لكي نضع قمرًا على مداره الدائري ، يجب أن نمكنه عند ارتفاع h من سرعة متجهتها عمودية على متجهة الموضع \vec{TS} و قيمتها

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}} \quad \text{تحقق :}$$

2 - 6 (الأقمار الساكنة .

من بين آلاف الأقمار الاصطناعية التي تدور حول الأرض ، تستعمل الأقمار الساكنة أساسًا في الاتصالات .
يكون قمر ساكنًا عندما يبقى على الدوام في المستقيم الرأسية لنقطة من الأرض ؛ فهو ساكن بالنسبة لملاحظ على الأرض .
لنحدد الشروط اللازمة لكي يكون قمر ساكنًا .



لنعتبر نقطة M من سطح الأرض .
الأرض تدور حول محورها و يجب على القمر أن يبقى موجودا في الرأسى OM لكي يظهر ساكنا :
حركته دائرية منتظمة و لكن مركزها O' و اتجاهات تسارعه و $\vec{F}_{T/S}$ تمر من O' . بينما ، يفرض قانون التجاذب أن يكون اتجاه القوة $\vec{F}_{T/S}$ مارا من المركز O (مركز الأرض) : O' متطابق مع O فقط إذا كان المسار يوجد في مستوى خط الاستواء .
يجب أن يكون الدور المداري للقمر مساويا لدور دوران الأرض حول نفسها :
 $T = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 04 \text{ s} = 86 \text{ } 164 \text{ s}$
الارتفاع h للقمر اذن محدد بواسطة العلاقة :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$

و منه نجد :

$$h = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} - R_T$$

تطبيق عددي : $h = 35800\text{km}$

يجب على القمر كذلك أن يدور في منحنى دوران الأرض حول نفسها .

خلاصة

لقمر اصطناعي ساكن موضع لا يتغير بالنسبة لمعلم مرتبط بالأرض : يبقى دائما على نفس المستقيم الرأسى المار من نقطة على سطح الأرض .

- ينبغي أن يكون مداره موجودا في مستوى خط الاستواء
- أن يدور في نفس منحنى دوران الأرض حول محورها القطبي
- أن يكون دوره المداري مساويا لدور حركة دوران الأرض حول محورها القطبي :

$$T = 23\text{h}56\text{min}4\text{s} = 86164\text{s}$$

يوجد على ارتفاع يقدر ب :

$$h = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} - R_T \approx 36000\text{km}$$

6-3) أقمار كواكب أخرى غير الأرض .

بنفس التعليل السابق ، في مرجع مركزي للكوكب المدروس ، لدينا :

$$\text{مع } M \text{ كتلة الكوكب} \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

هذه العلاقة تمكن من تحديد كتلة كوكب إذا كان لديه قمر نعرف دور و شعاع مداره

Jupiter : 63 satellites connus dont les 4 galiléens (1610)

	Diamètre	Rayon orbital	Période	Masse
Io	3 643 km	421 800 km	1,8 j	$8,9 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Ganymède	5 262 km	1 070 400 km	7,2 j	$1,5 \cdot 10^{23} \text{ kg}$
Callisto	4 821 km	1 882 700 km	16,7 j	$1,1 \cdot 10^{23} \text{ kg}$
Europe	3 122 km	671 000 km	3,6 j	$4,8 \cdot 10^{22} \text{ kg}$