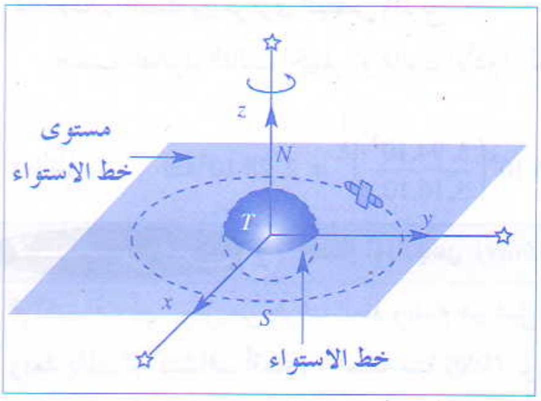


5 ـ الأقمار الاصطناعية الساكنة بالنسبة للأرض

يكون قمر اصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض إذا كان :

- يدور في منحى دوران الأرض.
- دوره المداري T يساوي دور حركة الدوران الخاصة للأرض حول محورها القطبي.
- مداره الدائري في مستوى خط الاستواء الأرضي.

تمرين 1 السرعة القصوى و السرعة الدنيا للمريخ

المسافتان القصوى والدنيا لكوكب المريخ بالنسبة لمركز الشمس (S) هما $d_1 = 2,49.10^8 km$ و $d_2 = 2,06.10^8 km$

1 ـ ما طبيعة مدار كوكب المريخ حول الشمس ؟

2 ـ احسب طول نصف المحور الأكبر لهذا المدار.

3 ـ في أية نقطة من المدار تكون سرعة المريخ قصوى ؟ وفي أية نقطة تكون دنيا ؟

4 ـ تساوي المسافة المتوسطة بين مركزي الأرض والشمس $r = 1,5.10^8 km$.

احسب المسافة المتوسطة r' بين مركزي الشمس والمريخ.

ـ نعتبر مسار الكواكب حول الشمس دائري.

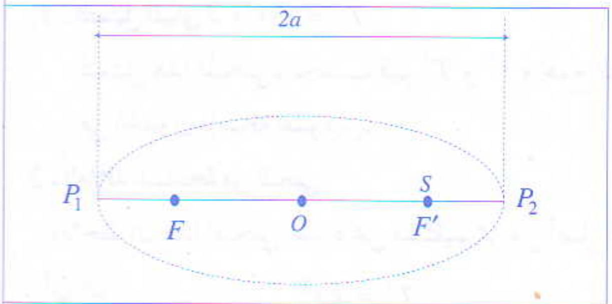
معطيات ـ الدور المداري للأرض : $T = 3,16.10^7 s$

ـ الدور المداري للمريخ : $T' = 5,94.10^7 s$

حل

1 ـ طبيعة المدار

مسار كوكب المريخ حول الشمس عبارة عن إهليلج، يشكل مركز الشمس إحدى بؤرتيه، لأن المسافة المتوسطة بين مركزي المريخ والشمس تتغير باستمرار.



2 ـ حساب طول نصف المحور الأكبر للمدار

لدينا : $P_1F' + F'P_2 = 2a$

أي أن : $d_1 + d_2 = 2a$

ومنه : $a = \dfrac{d_1 + d_2}{2} = 2,27.10^8 km$

3 ـ نقطتا المدار اللتان تكون عندهما السرعة قصوى ودنيا

تكون سرعة المريخ قصوى عندما يوجد مركزه عند النقطة P_2 الأقرب من مركز الشمس ؛

وتكون سرعة المريخ دنيا عندما يوجد مركزه عند النقطة P_1 الأبعد من مركز الشمس (انظر الشكل جانبه)

4 - حساب المسافة بين مركزي الشمس والمريخ

حسب القانون الثالث لكيبلر أو قانون الأدوار لدينا : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{T'^2}{r'^3} = k$ ومنه : $r'^3 = r^3 \cdot \left(\frac{T'}{T}\right)^2$

وبالتالي : $r' = r\left(\frac{T'}{T}\right)^{2/3} = 1,5.10^8\left(\frac{5,94.10^7}{3,16.10^7}\right)^{\frac{2}{3}} = 2,28.10^8 km$

تمرين 2 أقمار أورانوس (Uranus)

تم اكتشاف أورانوس من طرف العالم ويليام هيرشيل (William Herschel) سنة 1781 ؛

وبعد ذلك تم اكتشاف أقماره الخمسة سنة 1986 بواسطة المجس الفضائي (voyager 2).

يعطي الجدول التالي الدور المداري T والشعاع r لمدارات هذه الأقمار والتي نعتبرها دائرية.

الشعاع $r(\times 10^8 m)$	الدور $T(\times 10^5 s)$	القمر		
1,30	1,22	Miranda	ميراندا	1
1,92	2,18	Ariel	أرييل	2
2,67	3,58	Umbiel	أمبيل	3
4,38	7,53	Tutania	تيتانيا	4
5,86	11,7	Obéron	أوبيرون	5

1 - مثل، مبيانيا، T^2 بدلالة r^3

2 - ما العلاقة التي يمكن استنتاجها من هذا المبيان ؟

3 - بين أن $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_u}$ ، حيث M_u كتلة أورانوس.

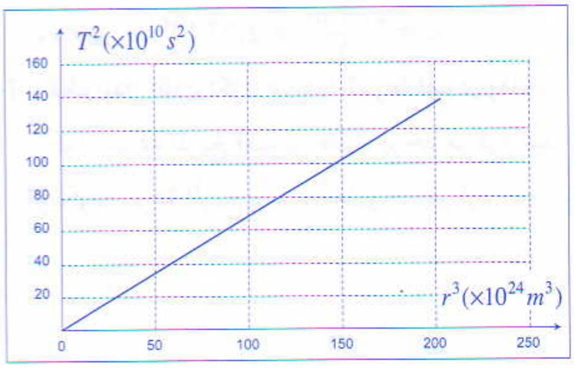
4 - احسب M_u. نعطي ثابتة التجاذب الكوني : $G = 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$

حل

1 - التمثيل المبياني لـ $T^2 = f(r^3)$.

لتمثيل هذا المنحنى، نحسب قيم T^2 و r^3 ونجمع النتائج في الجدول بإضافة عمودين.

$r^3(\times 10^{24} m^3)$	$T^2(\times 10^{10} s^2)$	$r(\times 10^8 m)$	$T(\times 10^5 s)$	القمر
2,20	1,49	1,30	1,22	1
7,08	4,75	1,92	2,18	2
19,03	12,82	2,67	3,58	3
84,03	56,70	4,38	7,53	4
201,23	136,89	5,86	11,7	5



2 - العلاقة المستنتجة من المنحنى

نلاحظ أن هذا المنحنى عبارة عن مستقيم يمر من أصل المعلم

أي أن : $T^2 = k.r^3$

ومنه : $\frac{T^2}{r^3} = k$

3 - البرهنة على العلاقة :

للبرهنة على العلاقة : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_u}$ ؛ نطبق القانون الثاني لنيوتن على أحد الأقمار في المرجع المركزي لأورانوس.

يخضع القمر أثناء دورانه حول أورانوس إلى قوة التجاذب $\vec{F}$ التي يطبقها أورانوس.

$$\vec{F} = m.\vec{a} = \frac{G.M_u.m}{r^2}.\vec{n}$$

حيث $\vec{n}$ متجهة واحدية مركزية منحاها نحو مركز أورانوس.

إذن :
$$\vec{a} = \frac{G.M_u}{r^2}.\vec{n} \quad (1)$$

يعبر عن التسارع $\vec{a}$ في أساس فريني $(\vec{\tau}, \vec{n})$ بالعلاقة :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{\tau} + \frac{v^2}{r}.\vec{n} \quad (2)$$

بمقارنة العلاقتين (1) و(2) نكتب :

$\frac{dv}{dt}.\vec{\tau} = \vec{0}$ ومنه : $\frac{dv}{dt} = 0$ أي أن : $v=cte$ (حركة منتظمة)

$\frac{v^2}{r}.\vec{n} = \frac{GM_u}{r^2}.\vec{n}$ ومنه : $v^2 = \frac{G.M_u}{r}$

بما أن الحركة دائرية منتظمة فإن دورها T هو : $T = \frac{2\pi r}{v}$ ومنه : $v = \frac{2\pi r}{T}$

أي أن : $v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G.M_u}{r}$ ومنه : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_u}$

4 - حساب الكتلة M_u :

لحساب الكتلة M_u ، نحسب المعامل الموجه للمنحنى $T^2 = f(r^3)$

لدينا : $T^2 = k.r^3$ ومنه : $k = \frac{\Delta T^2}{\Delta r^3} = 6,80.10^{-15}\ (S.I)$

إذن : $\frac{T^2}{r^3} = k = \frac{4\pi^2}{G.M_u}$

ومنه : $M_u = \frac{4\pi^2}{G.k} = \frac{4\pi^2}{6,67.10^{-11}.6,80.10^{-15}} = 8,70.10^{25} kg$

تمرين 3 قوانين كيبلر

معطيات :

كتلة الأرض : $M_T = 5,98.10^{24} kg$ ؛ المسافة المتوسطة أرض - شمس : $D = 1,5.10^{11} m$

كتلة القمر : $M_L = 7,3.10^{22} kg$ ؛ شعاع الأرض : $R = 6,4.10^6 m$

كتلة الشمس : $M_S = 1,99.10^{30} kg$ ؛ ثابتة التجاذب الكوني : $G = 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$

المسافة المتوسطة أرض - قمر $d = 3,84.10^8 m$ ؛ الدور المداري الخاص للأرض : $T = 23,9345h$

1 - فسر كيف تتغير سرعة كوكب عندما يقترب أو يبتعد عن الشمس.

2.1/2 - عرف الحركة الدائرية المنتظمة.

2.2 - أعط مميزات متجهة تسارعها.

3 ـ قارن شدة قوتي التجاذب المطبقة من طرف كل من القمر والشمس على الأرض.

4.1/4 ـ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، بين أن سرعة القمر ثابتة بالنسبة للمرجع المركزي الأرضي.

4.2 ـ أوجد تعبير القانون الثالث لكيبلر بالنسبة للقمر في حركة دائرية منتظمة حول الأرض.

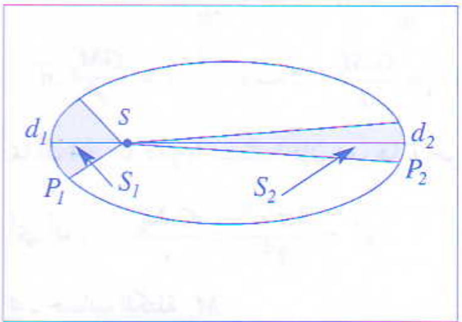
5.1/5 أعط الشروط التي ينبغي توفرها لكي يكون قمر اصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض.

ما دور مداره حول الأرض ؟

5.2 ـ ما الارتفاع h الذي يجب أن يتواجد فيه القمر الاصطناعي لكي يظهر ساكنا بالنسبة للأرض ؟

حـــل

1 ـ تغير سرعة كوكب



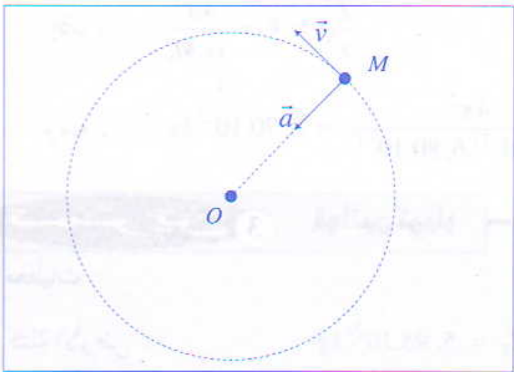
ـ حسب القانون الثاني لكيبلر، المساحتان S_1 و S_2 المكسوحتان من طرف القطعة $[SP]$ التي تربط مركز الشمس S بكوكب P خلال نفس المدة الزمنية متقايستان. كلما كانت المسافة شمس ـ كوكب صغيرة$(d_1 < d_2)$ كان طول المسار المقطوع Δs من طرف كوكب حول الشمس أكبر ؛

إذن كلما اقترب الكوكب من الشمس تزايدت سرعته والعكس صحيح (لأن $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$)

2.1/2 ـ تعريف الحركة الدائرية المنتظمة

ـ تكون حركة متحرك دائرية منتظمة، إذا كان مساره دائريا وقيمة سرعته ثابتة.

2.2 ـ مميزات متجهة التسارع



ـ نرمز لمركز المسار الدائري بـ O ولشعاعه بـ R.

مميزات متجهة تسارع المتحرك M :

ـ الأصل : النقطة M

ـ الاتجاه : المستقيم MO .

ـ المنحى : من M نحو O

ـ المنظم $a = \frac{v^2}{R}$

3 ـ مقارنة شدة قوتي التجاذب

ـ شدة القوة المطبقة من طرف القمر على الأرض : $F_{L/T} = \frac{G.M_T M_L}{d^2}$

ـ شدة القوة المطبقة من طرف الشمس على الأرض : $F_{S/T} = \frac{G.M_T.M_S}{D^2}$

مقارنة شدة القوتين $F_{S/T}$ و $F_{L/T}$

$$\frac{F_{S/T}}{F_{L/T}} = \frac{G.M_T.M_S}{D^2} \cdot \frac{d^2}{G.M_T M_L} = \frac{M_S}{M_L}\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \frac{1,99.10^{30}}{7,3.10^{22}} \cdot \left(\frac{3,84.10^8}{1,5.10^{11}}\right)^2 \approx 178,7$$

شدة القوة المطبقة من طرف الشمس على الأرض أكبر بـ 179 مرة من شدة القوة المطبقة من طرف القمر على الأرض.

4.1/4 ـ البرهنة

ـ المجموعة المدروسة بالنسبة للمرجع المركزي الأرضي : القمر

ـ القوى الخارجية المطبقة على القمر : قوة التجاذب $\vec{F}_{T/L}$ المطبقة من طرف الأرض.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نكتب :

$$\vec{F}_{T/L} = \frac{G.M_L M_T}{d^2}.\vec{n} = M_L(a_T.\vec{\tau} + a_N.\vec{n})$$

إذن، $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ أي أن : $v = cte$ و $a_N = \frac{G.M_T}{d^2} = \frac{v^2}{d}$ (1)

4.2 ـ القانون الثالث لكيبلر

الدور المداري للقمر هو : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{v}.d$ مع $\omega = \frac{v}{d}$

لدينا حسب العلاقة (1) : $G\frac{M_T}{d^2} = \frac{v^2}{d}$ ومنه : $v^2 = \frac{GM_T}{d}$

لدينا كذلك : $T^2 = \frac{4\pi^2}{v^2}d^2 = \frac{4\pi^2}{G.M_T}.d^3$

أي أن : $\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T} = k$ (القانون الثالث لكيبلر)

5.1/5 ـ ليكون قمر اصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض يجب أن :

ـ يدور في منحى دوران الأرض حول محورها القطبي ؛

ـ يكون دوره المداري مساويا لدور حركة دوران الأرض حول محورها القطبي.

ـ يكون مداره الدائري في مستوى خط الاستواء

5.2 ـ ارتفاع القمر الاصطناعي الساكن بالنسبة لسطح الأرض

بتطبيق القانون الثالث لكيبلر نكتب : $\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T}$

إذن : $(R+h)^3 = \frac{T^2.GM_T}{4\pi^2}$

ومنه : $h = \left(\frac{T^2.G.M_T}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R = \left(\frac{(23,9345.3600)^2.6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}}{4.\pi^2}\right)^{1/3} - 6,4.10^6 = 3,58.10^7 m$

$h \approx 36000 km$

تمرين 4 قمر اصطناعي مداره في مستوى خط الاستواء

يدور قمر اصطناعي (S) كتلته $m = 500kg$ على ارتفاع h من سطح الأرض وفق مدار دائري مركزه منطبق مع مركز الأرض.

ندرس حركة هذا القمر الاصطناعي في المرجع المركزي الأرضي.

1 ـ بين أن حركة (S) منتظمة.

2 ـ أوجد تعبير السرعة v والدور T للقمر (S) بدلالة h و R شعاع الأرض و g_0 شدة الثقالة عند سطح الأرض، ثم احسب قيمة v وقيمة T.

3 ـ اذكر إحدى استعمالات هذا القمر (S) ، علما أنه يدور في نفس منحى دوران الأرض حول محورها القطبي.

4 ـ بين أن : $\frac{T^2}{(R+h)^3}=k$ ؛ استنتج قيمة كتلة الأرض.

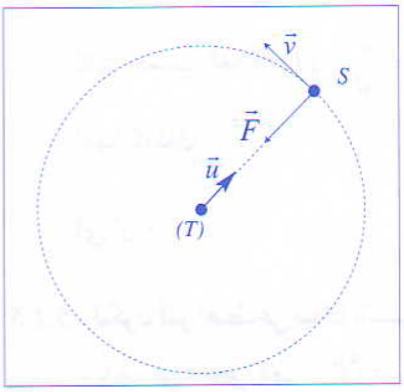
معطيات : $R=6380km$; $G=6,67.10^{-11}N.m^2.kg^{-2}$; $h=36000km$; $g_0=9,81m.s^{-2}$

حل

1 ـ البرهنة على أن حركة (S) منتظمة

يخضع القمر (S) أثناء دورانه حول الأرض إلى قوة التجاذب الكوني $\vec{F}$ ، بحيث :

$$\vec{F}=\frac{-G.M.m}{(R+h)^2}.\vec{u}$$



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القمر (S) في المرجع المركزي الأرضي نكتب :

$m.\vec{a}=\frac{-G.M.m}{(R+h)^2}.\vec{u}$ أي أن : $\vec{a}=\frac{-G.M}{(R+h)^2}.\vec{u}$

يعبر عن التسارع $\vec{a}$ للقمر الاصطناعي في أساس فريني بالعلاقة :

$(1)\quad \vec{a}=\frac{dv}{dt}.\vec{\tau}+\frac{v^2}{R+h}.\vec{n}$ مع $\vec{n}=-\vec{u}$

نحصل على : $(2)\quad \vec{a}=\frac{GM}{(R+h)^2}.\vec{n}$

بمقارنة العلاقتين (1) و(2) نحصل على :

$a_T=\frac{dv}{dt}=0$ أي أن : $v=cte$ ، مما يدل على أن الحركة دائرية منتظمة وتسارعها هو : $(3)\,a=a_N=\frac{v^2}{R+h}=\frac{G.M}{(R+h)^2}$

2 ـ تعبير v وتعبير T

من خلال العلاقة (3) ، نحصل على : $(4)\quad v^2=\frac{G.M}{(R+h)}$

وبما أن : $F=mg=\frac{G.M.m}{(R+h)^2}$ فإن : $g=\frac{G.M}{(R+h)^2}$

عند سطح الأرض، يكون $h=0$ و $g=g_0=\frac{G.M}{R^2}$

بتعويض $G.M$ بـ $g_0.R^2$ في العلاقة (3) نحصل على :

$\frac{v^2}{R+h}=g_0.\frac{R^2}{(R+h)^2}$ ومنه : $v=R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$

$$v=6380.10^3\sqrt{\frac{9,81}{42380.10^3}}=3,0.10^3m.s^{-1}$$

تعبير T : ينجز القمر دورة كاملة وفق مسار دائري محيطه $2\pi(R+h)$ خلال المدة T بالسرعة v.

إذن : $2\pi(R+h)=v.T$

$$2\pi(R+h)=R.\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}.T$$

$$(5)\qquad T=\frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}=\frac{2\pi}{6380.10^3}.\sqrt{\frac{(42380.10^3)^3}{9,81}}\approx 86749s=24h$$

3 - استعمال القمر الاصطناعي (S)

يدور القمر (S) في نفس منحى دوران الأرض، ومداره يوجد في مستوى خط الاستواء، ودوره المداري يساوي دور دوران الأرض حول محورها القطبي، إذن فهو قمر يبدو ساكنا بالنسبة لنقطة من سطح الأرض (ملاحظ أرضي)

نذكر من بين استعمالات هذا القمر، الاتصالات التلفزية واللاسلكية.

4 - البرهنة واستنتاج كتلة الأرض

لدينا حسب العلاقة (5) $T^2 = \frac{4\pi^2}{R^2}.\frac{(R+h)^3}{g_0}$ ومنه : $\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{g_0R^2}$ (6)

يعبر عن وزن الجسم عند سطح الأرض $(h = 0)$، بالعلاقة : $mg_0 = \frac{G.M.m}{R^2}$ $(F = P)$

ومنه : $g_0.R^2 = GM$

نعوض $g_0.R^2$ بتعبيرها في العلاقة (6) ، نحصل على : $\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{G.M} = k$

حساب الكتلة M

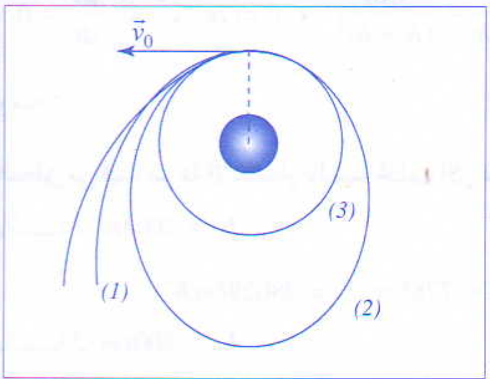
$$M = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{G.T^2} = \frac{4\pi^2(6380.10^3 + 36.10^6)^3}{6,67.10^{-11}.(86749)^2} = 5,98.10^{24}kg$$

تمرين 5 سرعة الاستقمار

لاستقمار قمر اصطناعي، تقوم مركبة فضائية بنقله خارج الغلاف الجوي وتدفعه في مداره بسرعة بدئية v_0.

توجد قيمتان خاصتان للسرعة عند نقطة التحرير بالنسبة لارتفاع معين عن سطح الأرض :

- سرعة الاستقمار الدائري v_s ؛
- سرعة التحرير v_L.



- عندما تكون $v_0 = v_S$ ،يكون المدار دائريا.
- عندما تكون $v_s < v_0 < v_L$ ، يكون المدار إهليلجيا.
- عندما يكون $v_0 \geq v_L$ ،يكون المدار شلجميا ، ولا يحدث استقمار القمر الاصطناعي. يسمى القمر الاصطناعي في هذه الحالة مسبارا فضائيا.

$v_L(km.h^{-1})$	$v_S(km.h^{-1})$	الارتفاع $h(km)$
39640	28029	200
37940	26832	800
15620	11044	36000

1 - تعرف على مختلف الوضعيات في الشكل أعلاه

2 - أوجد تعبير سرعة الاستقمار بدلالة ارتفاع نقطة التحرير.

3 - تحقق من القيم الواردة في الجدول جانبه.

4 - يوافق أحد ارتفاعات نقطة التحرير ارتفاع قمر ساكن بالنسبة للأرض.

عين هذا الارتفاع وحدد الشروط التي يجب توفرها لكي يكون هذا القمر ساكنا بالنسبة للأرض.

معطيات : كتلة الأرض : $M = 5,98.10^{24}kg$ $G = 6,67.10^{-11}N.m^2kg^{-2}$

شعاع الأرض : $R = 6380km$

حـــل

1 ـ **تعيين المسارات**

ـ المسار *(1)* : مدار شلجمي يوافق $v_0 \geq v_L$

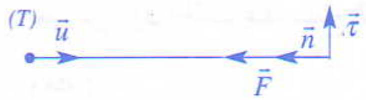
ـ المسار *(2)* : مدار إهليلجي يوافق $v_s < v_0 < v_L$

ـ المسار *(3)* : مدار دائري يوافق $v_0 = v_s$

2 ـ **تعبير سرعة الاستقمار**

يخضع القمر الاصطناعي في المرجع الأرضي، إلى قوة التجاذب المطبقة من طرف الأرض : $\vec{F} = -\frac{G.M.m}{(R+h)^2}\vec{u}$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القمر الاصطناعي، نكتب :



$$m.\vec{a} = -\frac{G.M.m}{(R+h)^2}\vec{u}$$

$\|\vec{u}\| = \|\vec{n}\| = 1$ و $\vec{u} = -\vec{n}$

أي أن :
$$(1) \quad \vec{a} = -\frac{G.M}{(R+h)^2}\vec{u}$$

يعبر عن التسارع $\vec{a}$ في أساس فريني بالعلاقة :

$$(2) \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{\tau} + \frac{v_0^2}{R+h}.\vec{n}$$

بمقارنة حدي المتساويتين *(1)* و*(2)* نكتب :

$1m.s^{-1} = 3,6km.h^{-1}$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \text{ أي أن } v = cte \text{ و } a = a_N = \frac{v_0^2}{R+h} = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

ومنه :
$$v_0 = \sqrt{\frac{G.M}{R+h}}$$

3 ـ **التحقق من قيمة سرعة الاستقمار بالنسبة لمختلف الارتفاعات**

ـ بالنسبة لـ $h_1 = 200km$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G.M_T}{R+h_1}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}}{(6380+200)10^3}} \approx 7786m.s^{-1} = 28029km.h^{-1}$$

ـ بالنسبة لـ $h_2 = 800km$

$$v_2 = \sqrt{\frac{G.M_T}{R+h_2}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}}{(6380+800)10^3}} \approx 7453m.s^{-1} \approx 26832km.h^{-1}$$

ـ بالنسبة لـ $h_3 = 36000km$

$$v_3 = \sqrt{\frac{G.M_T}{R+h_3}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}}{(6380+36000)10^3}} \approx 3068m.s^{-1} \approx 11044km.h^{-1}$$

4 ـ **شروط القمر الاصطناعي الساكن**

يكون القمر الاصطناعي، ساكنا بالنسبة للأرض، عند الارتفاع $h = 36000km$

الشروط التي ينبغي توفرها ليظهر القمر الاصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض هي أن :

ـ يدور القمر في منحى دوران الأرض حول محور قطبيها،

ـ يساوي دوره المداري T دور حركة الدوران الخاصة للأرض حول محورها القطبي.

ـ يوجد مدار القمر في مستوى خط الاستواء للأرض.