تصحيح تمارين المظاهر الطاقية

تمرين 1:

1-المعادلة التفاضلية باستعمال الدراسة الطاقية :

الطاقة الميكانيكية تكتب:

$$E_m = E_c + E_{pe} + E_{pp}$$

باعتبار المستوى الذي يمر من مركز قصور الجسم حالة مرجعية لطاقة الوضع الثقالية يكون : $E_{pp} = 0$

واعتبار النابض غير مشوه الحالة المرجعية ل E_{pe} فإن تعبير طاقة الوضع المرنة تكتب :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2$$

تعبير الطاقة الحركية : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

بما أن الإحتكات مهملة ، فإن الطاقة الميكانيكية تنحفظ أي : $E_m = cte$

وبالتالي : $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\frac{1}{2} \times 2m\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2} \times 2Kx\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}\,(m\ddot{x} + Kx) = 0$$

المعادلة التفاضلية :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

2-1-لدينا حل المعادلة التفاضلية يكتب :

$$x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \Rightarrow \dot{x}(t) = -\frac{2\pi}{T_0}X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \Rightarrow$$

$$\ddot{x}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

نعوض في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + \frac{K}{m}X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = 0$$

$$X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\left[-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2+\frac{K}{m}\right]=0$$

بما أن $x(t)\neq 0$ مهما كانت t ، فإن :

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2+\frac{K}{m}=0$$

نستنتج :

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{0,1}{40}}=0,31s$$

2-2-حساب X_m و φ :

حسب الشوط البدئية :

عند t=0 لدينا : $x(0)=-d$ و $\dot{x}(t)=0$

$$\begin{cases} x(0)=X_m cos\varphi \\ \dot{x}(0)=-\frac{2\pi}{T_0}X_m sin\varphi \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} X_m cos\varphi=-d \\ sin\varphi=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} cos\varphi=-\frac{d}{X_m}<0 \\ \varphi=0 \text{ أو } \varphi=\pi \end{cases}$$

بماأن $cos\varphi<0$ فإن : $\varphi=\pi$ ومنه : $cos\pi=-\frac{d}{X_m}=-1$

الوسع :

$$X_m=d=2cm$$

النبض الخاص :

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}}=20\,rad.s^{-1}$$

المعادلة الزمنية تكتب :

$$x(t)=2.10^{-2}cos(20t+\pi)$$

3-2-تعبير السرعة :

$$\dot{x}(t)=-2.10^{-2}\times 20\,sin(20t+\pi)$$

$$\dot{x}(t)=-0,4\,sin(20t+\pi)=0,6\,\sin(20t+\pi)$$

تكون السرعة قصوية عندما يكون $\sin(20t+\pi)=1$ أي:

$$\dot{x}_m = 0,6\ m.s^{-1}$$

4-2-قيمة طاقة الوضع المرنة عندما تكون $\dot{x} = 0,42\ m.s^{-1}$

بما أن الإحتكاكات مهملة ، فإن الطاقة الميكانيكية تنحفظ : $E_m = cte$

نعلم أن : $E_m = \frac{1}{2}KX_m^2$

$$E_m = E_C + E_{Pe} \Rightarrow E_{Pe} = E_m - E_C$$

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}KX_m^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

ت.ع:

$$E_{Pe} = \frac{1}{2} \times 40 \times (2.10^{-2})^2 - \frac{1}{2} \times 0,1 \times (0.3)^2 = 3,5.10^{-3}J$$

تمرين 2 :

1-مبيانيا الدور الخاص T_0 هو: $T_0 = 0,5\ s$

استنتاج عزم قصور الساق :

لدينا:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

$$T_0^2 = 4\pi^2\frac{J_\Delta}{C}$$

$$J_\Delta = \frac{C.T_0^2}{4\pi^2} = \frac{2.10^{-3} \times 0,5^2}{4\pi^2} = 1,26.10^{-5}kg.m^2$$

2-نلاحظ أن وسع الذبذبات يبقى ثابتا خلال الزمن نستنتج أن الإحتكاكات مهملة أثناء مدة التسجيل.

3-حساب الطاقة الحركية للنواس عند مرور القضيب من موضع توازنه :

الطاقة الميكانيكية تكتب:

$$E_m = E_{pt} + E_c = \frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$$

باعتبار المستوى الأفقي المار من G مركز قصور القضيب مرجعا لطاقة الوضع الثقالية $E_{pp} = 0$

عند موضع التوازن $\theta = 0$ تكون السرعة الزاوية قصوية $\dot{\theta} = \dot{\theta}_m$.

نكتب : $E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_m^2$

عندما يكون $\theta = \theta_m$ فإن السرعة تكون منعدمة $\dot{\theta} = 0$

وبالتالي:

$$E_m = \frac{1}{2} C \theta_m^2$$

بما أن الطاقة الميكانيكية تنحفظ ، فإن :

$$\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_m^2 = \frac{1}{2} C \theta_m^2$$

$$\dot{\theta}_m = \theta_m \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

ت.ع:

لدينا : $\theta_m = 10° = \frac{\pi}{18} rad$

$$\dot{\theta}_m = \frac{\pi}{18} \sqrt{\frac{2.10^{-3}}{1.26.10^{-5}}} = 2,19\, rad.s^{-1}$$

4-حساب طاقة الوضع اللي E_{pt} والطاقة الحركية E_c عند $\theta = 0,1\, rad$:

$$E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2 = \frac{1}{2} \times 2.10^{-3} \times 0,1^2 = 10^{-5} J$$

نعلم أن :

$$E_m = E_{pt} + E_c \Rightarrow E_c = E_m - E_{pt}$$

$$E_c = \frac{1}{2} C \theta_m^2 - \frac{1}{2} C \theta^2 = \frac{1}{2} C (\theta_m^2 - \theta^2)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \times 2.10^{-3} \left[\left(\frac{\pi}{18} \right)^2 - 0,1^2 \right] = 2.10^{-5} J$$

5-استنتاج الطاقة الميكانيكية E_m :

$$E_m = E_{pt} + E_c = 10^{-5} + 2.10^{-5} = 3.10^{-5} J$$

تمرين 3 :

1-تعبير الطاقة الميكانيكية :

لدينا :

$$E_m = E_C + E_{pt}$$

مع:

$$E_{Pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + cte = \frac{1}{2}C\theta^2 \quad \text{و} \quad E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$$

2- باعتبار الاحتكاكات مهملة فإن: $E_m = cte$ وبالتالي : $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}J_\Delta\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} + \frac{1}{2}C\frac{d\theta^2}{dt}$$

$$\frac{1}{2}J_\Delta(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + \frac{1}{2}C \times (2\theta\dot{\theta}) = 0$$

$$J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\theta}(J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta) = 0$$

بما أن $\dot{\theta} \neq 0$ فإن : $J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta = 0$

المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$$

3-1-مبيانيا الوسع :

$$\theta_m = \frac{\pi}{4}rad$$

القيمة القصوى لطاقة وضع اللي :

$$E_{Ptmax} = 5.10^{-3}J$$

3-2-استنتاج ثابتة اللي C :

$$E_{Ptmax} = \frac{1}{2}C\theta_m^2 \Rightarrow C = \frac{2E_{Ptmax}}{\theta_m^2}$$

$$C = \frac{2 \times 5.10^{-3}}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = 1{,}62.10^{-2}\ N.m.rad^{-1}$$

حساب T_0 الدور الخاص للمتذبذب :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}6.10^{-3}}{1{,}62.10^{-2}}} = 1{,}97s$$

4-المعادلة الزمنية لحركة القضيب :

$$\theta(t) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

حسب الشروط البدئية:

$\theta(0) = \theta_m$ و $\dot{\theta}(0) = 0$

$$\theta_m = \theta_m cos\varphi$$
$$cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{1,97}t\right)$$

$$\theta(t) = 0,785\cos(3,19t)$$

5-السرعة الزاوية القصوية $\dot{\theta}_m$:

عندموضع التوازن : $\theta = 0$ فإن : $\dot{\theta} = \dot{\theta}_m$ الطاقة الميكانيكية تكتب : $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2$

عندما يكون : $\theta = \theta_m$ فإن : $\dot{\theta} = 0$ الطاقة الميكانيكية تكتب : $E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2$

نكتب :

$$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2 = \frac{1}{2}C\theta_m^2 \Rightarrow \dot{\theta}_m = \theta_m\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} = \theta_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)$$

$$\dot{\theta}_m = 0,785 \times \frac{2\pi}{1,97} = 2,5\, rad.s^{-1}$$

تمرين 4:

1-التعرف على المنحنيات :

عند اللحظة $t = 0$ السرعة البدئية للنواس منعدمة وبالتالي الطاقة الحركية منعدمة ، يمثل المنحنى اللون الأزرق الطاقة الحركية E_C. منحنى اللون الأخضر يمثل طاقة الوضع الثقالية E_{pp}.
الطاقة الميكانيكية للمجموعة E_mثابتة فهي ممثلة بالمنحنى ذي اللون الأحمر.

2-الدور الخاص :

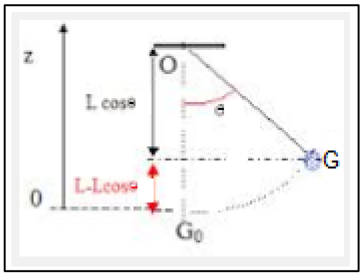
خلال الدور الخاص T_0 تنعدم كل من الطاقة الحركية وطاقة الوضع الثقالية مرتين ، وتأخذ قيمة قصوية مرتين ، وبالتالي دور الطاقة الحركية يساوي نصف الدور الخاص .

$$\frac{T_0}{2} = T$$

$$T_0 = 2T = 2 \times 1 = 2s$$

3-طول النواس L :

تعبير الدور الخاص للنواس البسيط في حالة تذبذبات ذات وسع ضعيف :



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$$

$$L = \frac{g.T_0^2}{4\pi^2} = \frac{9,8 \times 2^2}{4\pi^2} = 0,99m$$

$$L \approx 1m$$

4-تحديد θ_0 الأفصول الزاوي البدئي :

طاقة الوضع الثقالية للنواس : $E_{pp} = mgz$

حسب الشكل : $z = L(1 - cos\theta)$

$$E_{pp} = mgL(1 - cos\theta)$$

في الموضع البدئي θ_0 تكون طاقة الوضع الثقالية قصوى : $E_{ppmax} = m.g.L(1 - cos\theta_0)$

$$1 - cos\theta_0 = \frac{E_{ppmax}}{mgL} \Rightarrow cos\theta_0 = 1 - \frac{E_{ppmax}}{mgL}$$

$$cos\theta_0 = 1 - \frac{80.10^{-3}}{0.215 \times 9,8 \times 1} = 0,96$$

$$\theta_0 = 15,8°$$