8

المجموعات الميكانيكية المتذبذبة

Systèmes mécaniques oscillants

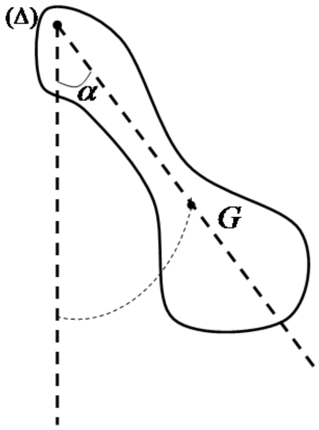
I – تقديم المجموعات الميكانيكية المتذبذبة :

1 – تعريف :

المجموعة الميكانيكية المتذبذبة هي مجموعة تنجز حركة دورية ذهابا و إيابا حول موضع توازنها المستقر

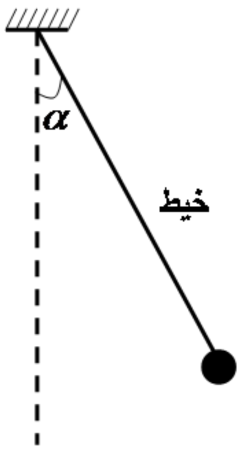
أ – النواس الوازن : pendule pesant

هو جسم صلب غير قابل للتشويه يمكنه إنجاز حركة تذبذبية حول محور (Δ) ثابت أفقي لا يمر بمركز قصوره تحت تأثير وزنه.



ب – النواس البسيط : pendule simple

هو جسم صلب نقطي يتأرجح على مسافة ثابتة من من محور أفقي ثابت :

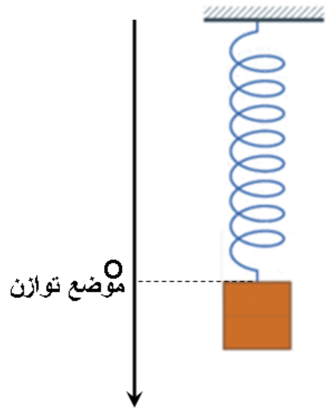


❖ **ملحوظة :**

النواس البسيط حالة خاصة للنواس الوازن عندما تكون أبعاد الجسم صغيرة و كتلته كبيرة.

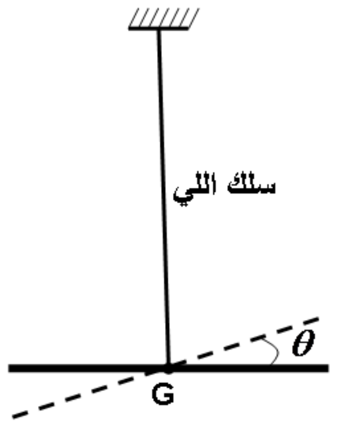
ج – النواس المرن : pendule élastique

يتكون من جسم صلب مشذوذ بطرف نابض ذي لفات غير متصلة و كتلته مهملة :



د – النواس اللي : pendule de torsion

يتكون من سلك أحد طرفيه مثبت إلى حامل و طرفه الآخر إلى قضيب متجانس معلق من مركز قصوره.



2 – الحركة التذبذبية و مميزاتها :

- الحركة التذبذبية : هي حركة ذهاب و أياب حول موذع التوازن.
- الحركة التذبذبية الحرة : هي حركة تذبذبية لمجموعة ميكانيكية دون أن تكتسب طاقة ما من أي مجموعة خارجية بعد إحداث الحركة.
- موضع التوازن المستقر : هو الموضع الذي إذا زحزح عنه موضع مركز قصور المجموعة المتذبذبة تعود إليه لتستقر فيه.
- وسع الحركة لمذبذب ميكانيكي حر وغير مخمد : هو القيمة القصوى الموجبة التي يأخذها المقدار المميز (أفصول خطي أو أفصول زاوي) لحركة المتذبذب عن موضع توازن المستقر.
- الدور الخاص T_0 لمتذبذب ميكانيكي حر و غير مخمد : هو المدة الزمنية التي تستغرقها ذبذبة واحدة وحدته في (SI) هي الثانية (S) .

3 – خمود الذبذبات الميكانيكية :

أ – ظاهرة الخمود : phénomène d’amortissement

يتناقص وسع التذبذبات تدريجيا مع الزمن إلى أن يتوقف المتذبذب عند موضع توازنه المستقر و تسمى هذه الظاهرة : ظاهرة الخمود.

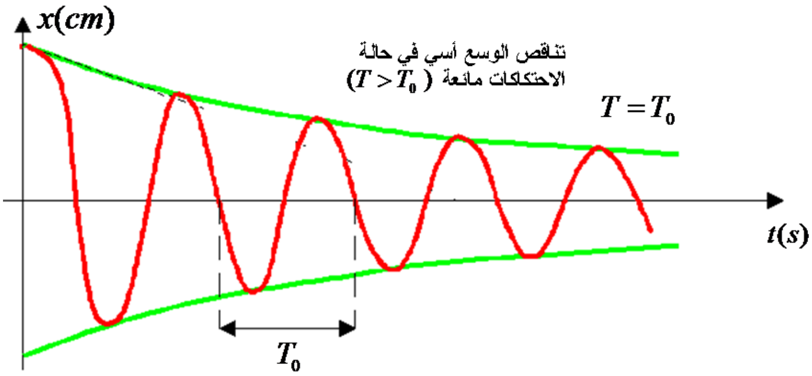
و تحدث هذه الظاهرة بسبب وجود الاحتكاكات التي يمكن تصنيفها إلى صنفين :

- احتكاكات صلبة : تنتج عن تماس المتذبذب الميكانيكي مع جسم صلب و ينتج عنها خمود صلب.
- احتكاكات مائعة : تنتج عن تماس المتذبذب الميكانيكي مع جسم مائل (سائل أو غاز) و ينتج عنها خمود مائع.

أ –أنظمة خمود الذبذبات الميكيانيكية :

❖ **حالة الخمود الضعيف : نظام شبه دوري amortissement faible**

يتناقص وسع الذبذبات ترردريجيا مع الزمن إلى أن يستقر عند موضع توازنه المستقر ، حركة المتذبذب في هذه الحالة ليست دورية نقول أنها شبه دورية دورها T يقارب الدور الخاص T_0 عموما $(T \geq T_0)$



❖ ملحوظة :

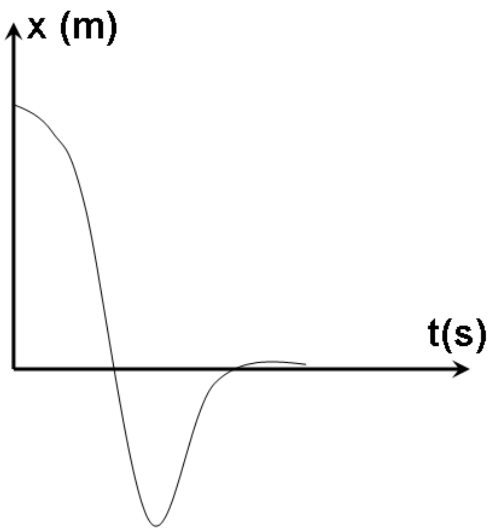
- تناقص الوسع خطي في حالة الاحتكاكات الصلبة $(T = T_0)$.

- كلما كان الخمود ضعيف كلما تتناهى T نحو T_0 .

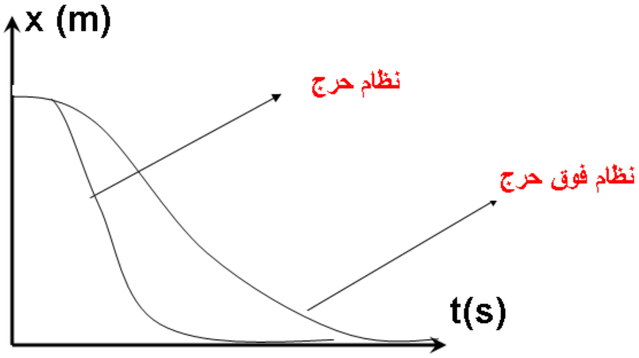
❖ حالة الخمود الحاد : نظام لا دوري amortissement fort(aigu)

في هذه الحالة تكون حركة المتذبذب ال دورية و نميز 3 حالات حسب أهمية الخمود :

- النظام تحت الحرج : ينجز المتذبذب ذبذبة واحدة قبل أن يتوقف.



- النظام الحرج : يعود المتذبذب إلى موضع توازنه المستقر دون أن يتذبذب :



- النظام فوق الحرج : يستغرق وقتا طويلا لكي يرجع إلى موضع توازن المستقر دون أن يتذبذب.

❖ ملحوظة :

لصيانة الحركة التذبذبية نستعمل أجهزة ملائمة تمكن من تعويض الطاقة المبددة و بذلك تصبح الحركة التذبذبية مصانة.

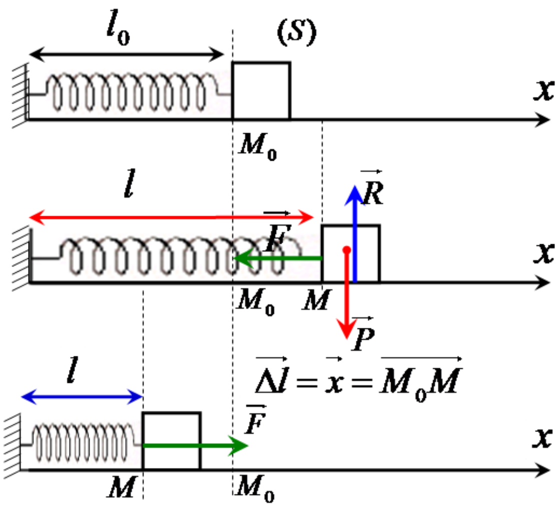
II – دراسة مجموعات ميكانيكية متذبذبة :

1 – النواس المرن :

1 – 1 قوة الارتداد التي يطبقها النابض :

نعتبر نواسا مرنا في وضع أفقي ، عندما يكون النابض حرا تحتل نقطة تماسه مع الجسم (S) الموضع M_0 . و عندما يكون النابض مضغوطا أو مطالا تحتل هذه النقطة الموضع M . في هذه الحالة يطبق النابض على الجسم قوة ارتداد $\vec{F}$ تسعى إلى ارجاع الطرف الحر للنابض إلى وضعه البدئي.

$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OG}$



$\vec{F} = -k\overrightarrow{M_0M} = -k\vec{\Delta l}$

$\vec{F} = -k\Delta l\vec{i} = -kx\vec{i}$

$\Delta l = l - l_0 = x$ مع $l > l_0$

$\vec{F} = -k\overrightarrow{M_0M} = -k\vec{\Delta l}$

$\vec{F} = k\Delta l\vec{i} = -kx\vec{i}$

$\Delta l = l - l_0 = -x$ مع $l < l_0$

$\overrightarrow{M_0M} = \vec{\Delta l} = \vec{x} = -x\vec{i}$

❖ مميزات $\vec{F}$ قوة الارتداد :

ن ت : نقطة تماس الجسم الصلب و النابض

خ ت : محور الدوران

المنحى : من $\vec{F}$ معاكس منحى التشويه

الشدة : $F = k\Delta l = k(l - l_0)$ حيث k : صلابة النابض

إذن نعرف قوة الارتداد ب : $\boxed{\vec{F} = -k\overrightarrow{M_0M} = -k\vec{\Delta l} = -kx\vec{i}}$

1 – 2 المعادلة التفاضلية : l'équation différentiel

المجموعة المدروسة : $\{(S)$ الجسم$\}$

جرد القوى المطبقة على الجسم (S) : نهمل الاحتكاكات

$\vec{P}$: وزن الجسم (S)

$\vec{R}$: تأثير السطح الافقي

$\vec{T}$: قوة الارتداد

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum M\left(\vec{F}_{ext}\right) = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة المتجهة على محور المعلم $(O,\vec{i})$:

$$\vec{P}_x + \vec{R}_x + \vec{T}_x = m\vec{a}$$

$$0 + 0 - kx = m\ddot{x}$$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها عبارة عن دالة جيبية :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

1 – 3 حل المعادلة التفاضلية :

يكتب حل العام للمعادلة التفاضلية كالتالي :

$$\boxed{x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)}$$

x_m : وسع الحركة ب (m)

T_0 : الدور الخاص ب (s)

φ : الطور عند اللحظة $t = 0$ ب (rad)

$\frac{2\pi}{T_0} + \varphi$: الطور عند اللحظة t ب (rad) ، مع $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$: النبض الخاص ب (rad/s)

1 – 4 تعبير الدور الخاص T_0 :

لدينا

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = -\frac{2\pi}{T_0}.x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$$

$$\ddot{x}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 .x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$$

$$\ddot{x}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 .x(t)$$

نعوض في المعادلة التفاضلية :

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 .x(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

$$x(t).\left(\frac{k}{m} - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\right) = 0$$

$$x(t) = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{k}{m} - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = 0$$

$$\frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = 0 \qquad \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

❖ التردد الخاص f_0 :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

2 – نواس اللي :

2 – 1 مزدوجة الارتداد التي يطبقها اللي :

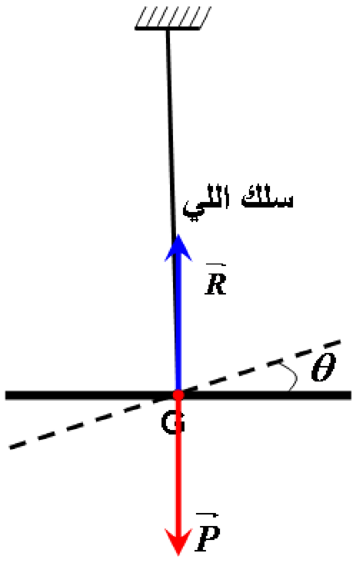
عندما تطبق مزدوجة قوتين على قضيب يحدث لي السلك و عند حذف المزدوجتين ، يعود القضيب إلى موضع توازنه بفعل **قوى الارتداد** التي تطبقها مولدات السلك على القضيب و تسمى **مزدوجة اللي**.

يعبر عنها بالعلاقة : $\boxed{\mathrm{M}_{\Delta} = -C\theta}$

C : ثابتة تتعلق بطول السلك و مقطعه و نوعيته (طبيعته)

2 – 2 المعادلة التفاضلية :

نعتبر نواس اللي في توازنه المستقر ، ندير القضيب عن موضع توازنه بزاوية θ_m و نحرره بدون سرعة بدئية، فينجز حركة تذبذبية حرة حول موضع التوازن المستقر ون نعتبر الاحتكاكات مهملة.



❖ المجموعة المدروسة : {القضيب}

جرد القوى المطبقة على القضيب

$\vec{P}$: وزن القضيب

$\vec{R}$: تأثير محور الدوران (Δ)

M_C : عزم مزدوجة اللي : $\mathrm{M}_C = -C\theta$

بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك في حالة دوران : $\sum \mathrm{M}\left(\vec{F}_{ext}\right) = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$

$$\mathrm{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathrm{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathrm{M}_C = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

لأن تأثيرهما يتقاطع مع محور الدوران : $\mathrm{M}_{\Delta}(\vec{P}) = \mathrm{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$

وبالتالي : $-C.\theta = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية يحققها القضيب : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}}.\theta = 0}$

حلها عبارة عن دالة جيبية : $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$

إذن طبيعة حركة القضيب دورانية جيبية.

❖ **تعبير الدور الخاص T_0**

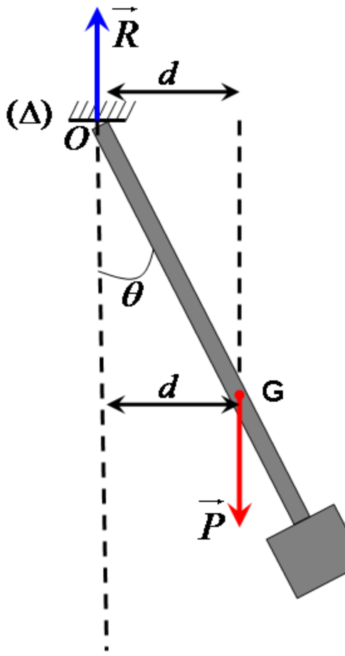
$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{C}{J_\Delta} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

❖ **تطبيق :**

3 – نواس الوزان :

نعتبر نواس وزان ينجز ذبذبات صغيرة وحرة بدون احتكاكات و هو عبارة عن قضيب ثبتت عليه سحمة :



$$\sin\theta = \frac{d}{OG}$$

$$d = OG.\sin\theta$$

❖ المجموعة المدروسة : {سحمة القضيب +}

جرد القوى المطبقة على المجموعة

$\vec{P}$: وزن المجموعة

$\vec{R}$: تأثير محور الدوران (Δ)

بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك في حالة دوران :

$$\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

لأن تأثيرها يتقاطع مع محور الدوران :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = -P.d = -mg.OG.\sin\theta$$

$$-mg.OG.\sin\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

و بما أن الذبذبات صغيرة : $\theta \le 0{,}26 rad$ أو $\theta < 15°$ فإن $\sin\theta \approx \theta$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية يحققها الافصول الزاوي للنواس :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{m.g.OG}{J_\Delta}.\theta = 0}$$

حلها عبارة عن دالة جيبية :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$$

إذن طبيعة حركة النواس دورانية تذبذبية جيبية.

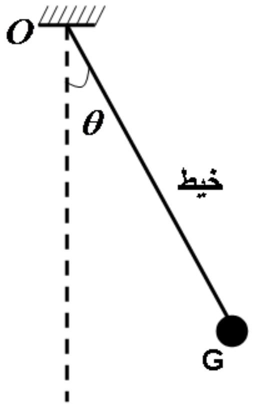
❖ ***تعبير الدور الخاص T_0***

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{m.g.OG}}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{m.g.OG}{J_\Delta} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

4 – نواس البسيط :

النواس البسيط نموذج مثالي لمتذبذب ميكانيكي و هو حالة خاصة للنواس الوازن حيث : $OG = l$ و $J_\Delta = m.r^2 = m.l^2$



و بالتالي تصبح المعادلة التفاضلية :

$$\ddot{\theta} + \frac{m.g.l}{m.l^2}\theta = 0$$

معادلة تفاضلية حلها عبارة عن دالة جيبية :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

❖ ***تعبير الدور الخاص T_0***

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

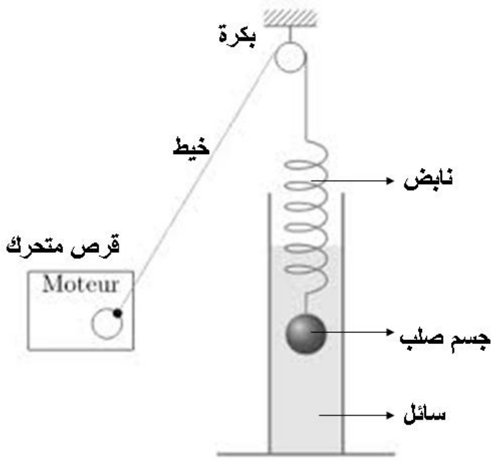
II ظاهرة الرنين الميكانيكي :

1 – الذبذبات القسرية : oscillations forées

- تؤثر الاحتكاكات على التذبذبات الميكانيكية فتصبح حركتها مخمدة و يمكن صيانتها بتعويض الطاقة المبددة بكيفية تتناسب مع طبيعة المذبذب.

حيث يتم تجميع المتذبذب الميكانيكي مع جهاز يمنحه الطاقة اللازمة لكي تصير حركته مصونة **(entretenu)** ، هذا يسمى **المثير excitateur** و هو مجموعة ذات حركة جيبية تفرض دورها T_e على المجموعة المتذبذبة فتصبح هذه الذبذبات قسرية ، **ويسمى الرنان (résonance)**

❖ **مثال :**



- يسمى القرص المتحرك و الخيط و البكرة بالمثير

- تسمى المجموعة {جسم صلب + نابض} بالرنان

1 – الرنين الميكانيكي : résonance mécanique

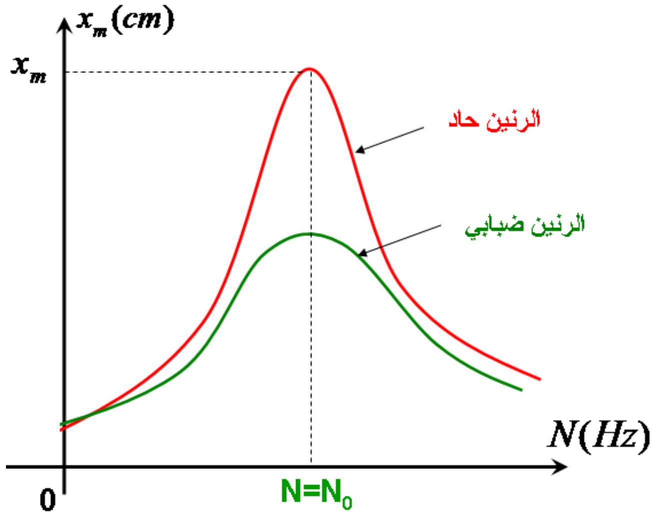
يتعلق وسع الذبذبات القسرية للرنان بالدور T_e للمثير ، و يصير هذا الوسع أقصى عندما يقارب الدور T_e الدور الخاص T_0 للمجموعة المتذبذبة نقول أنه تم حدوث رنين ميكانيكي $(T_0 = T_e)$

إذن تحدث ظاهرة الرنين عندما يقارب الدور T_e لذبذبات الرنان دوره الخاص T_0. $(T_0 = T_e)$ أو $(N_0 = N_e)$

❖ ملحوظة :

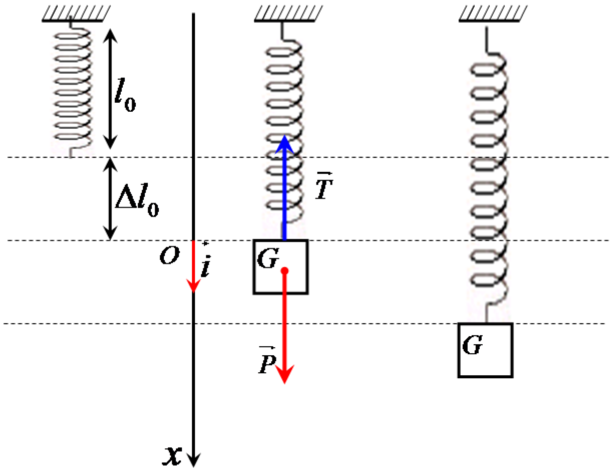
كلما كان الخمود ضعيف كلما كانت ظاهرة الرنين بارزة فنحصل الرنين الحاد الذي يتجلى في كون وسع التذبذبات القسرية يأخذ قيمة كبيرة عند الرنين.

- في حالة الخمود القوي يكون الرنين ضبابيا بحيث يصبح وسع الذبذبات القسرية عند الرنين صغيرا.



❖ تطبيق : النواس المرن الرأسي

نعتبر نواسا مرنا رأسيا مكونا من نابض صلابته $k = 20N$ و جسم صلب (S) كتلته $m = 200g$ ، نزيح الجسم (S) رأسيا نحو الأسفل عن موضع توازنه ب $3cm$ ثم نحرره بدون سرعة بدئية :



نعتبر معلما $(O,\vec{i})$ رأسيا موجها نحو الأسفل أصله O منطبق مع مركز قصور الجسم (S) عند التوازن G_0 ، عند اللحظة $t=0$ يمر الجسم (S) من موضع توازنه المستقر G_0 في المنحى الموجب.

1 – أوجد إطالة النابض Δl_0 عند التوازن ؟

2 – أوجد المعادلة التفاضلية للحركة ؟

3 – أوجد المعادلة الزمنية للحركة ؟

4 – أحسب الدور الخاص لحركة المتذبذب ؟ نعطي $g=10N/kg$

1 – المجموعة المدروسة : $\{(S)$ الجسم$\}$

جرد القوى المطبقة على الجسم (S)

$\vec{P}$: وزن الجسم (S)

$\vec{T}$: توتر النابض

بما أن الجسم (S) في حالة توازن فإنه حسب شرط التوازن : $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$

ومنه : $T=P$ و $mg-k\Delta l_0=0$

$$mg=k\Delta l_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta l_0=\frac{m.g}{k}}$$

$$\Delta l_0=\frac{0{,}2\times 10}{20}=0{,}1m=10cm$$

2 – خلال الحركة :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma \mathrm{M}\left(\vec{F}_{ext}\right)=m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$$

نسقط العلاقة المتجهة على محور المعلم $(O,\vec{i})$:

$$\vec{T}=-k(\Delta l_0+x)\vec{i} \quad \text{و} \quad \vec{P}=mg\vec{i}$$

$$mg\vec{i}-k(\Delta l_0+x)\vec{i}=m\ddot{x}\vec{i}$$

$$\underbrace{mg - k\Delta l_0}_{\text{عند التوازن}=0} - kx = m\ddot{x}$$

معادلة تفاضلية لحركة النواس المرن : $m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$

3 – بما أن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية فإن حلها عبارة عن دالة جيبية يكتب حلها كالتالي :

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

لدينا : $x_m = 3cm$

و حسب الشروط البدئية : $x(t=0) = x_m \cos(\varphi) = 0$ عند $t=0$ يكون موضع التوازن

$$\cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

و لدينا :

$$\dot{x}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\dot{x}(t=0) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)x_m \sin(\varphi) > 0$$

يمر الجسم (S) من موضع توازن عند $t=0$ في المنحى الموجب $v > 0$

أي أن : $\sin\varphi < 0$ و منه $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

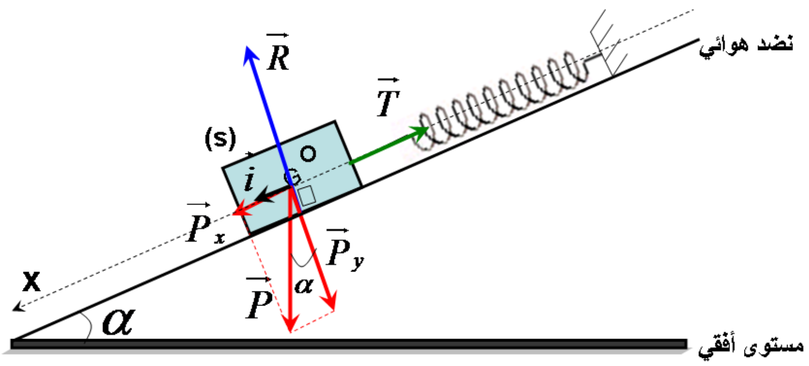
$$\boxed{x(t) = 3.10^{-2}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

4 – لدينا : $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$$T_0 = 2 \times 3{,}14 \times \sqrt{\frac{0{,}2}{20}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_0 = 0{,}628s}$$

❖ تطبيق : النواس المرن المائل

نعتبر جسم (S) صلب كتلته $m = 100g$ بإمكانه أن يتزحلق بدون احتكاك فوق نضد هوائي ، مائل بزاوية $\alpha = 10^0$ بالنسبة للمستوى الأفقي هذا الجسم مرتبط بنابض كما الشكل التالي :



علما أن إطالة النابض عند التوازن $\Delta l_0 = 8cm$ و $g = 9{,}8N/kg$

1 – أوجد صلابة النابض ؟

2 – نزيح الجسم الصلب عن موضع توازنه المستقر نحو الأسفر ب $3cm$ ثم نحرره بدون سرعة بدئية :

2 – 1 أوجد المعادلة التفاضلية للحركة ؟

2 – 2 علما أن مركز قصور الجسم يمر عند اللحظة $t = 0$ من النقطة ذات الأفصول $x = \pm 1{,}5cm$ في المنحى الموجب

أوجد المعادلة الزمنية للحركة التذبذبية ؟

2 – 3 أحسب الدور الخاص للحركة التذبذبية ؟

1 – دراسة الجسم (S) عند التوازن

المجموعة المدروسة : $\{(S)$ الجسم$\}$

جرد القوى المطبقة على الجسم (S)

$\vec{P}$: وزن الجسم (S)

$\vec{R}$: تأثير سطح النضد الهوائي

$\vec{T}$: توتر النابض $T = k\Delta l_0$

بما أن الجسم (S) في حالة توازن فإنه حسب شرط التوازن : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$

نسقط العلاقة المتجهية وفق المحور $(O,\vec{i})$: $\vec{P}_x + \vec{R}_x + \vec{T}_x = \vec{0}$

$$P_x + 0 - T = 0$$

ومنه : $mg.\sin\alpha - T = 0$ و $T = k\Delta l_0 = mg.\sin\alpha$

$$k = \frac{mg.\sin\alpha}{\Delta l_0} = \frac{0{,}1 \times 9{,}8 \times \sin 10°}{8.10^{-2}} = 2{,}13N/m$$

2 – 1 خلال الحركة :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum M\left(\vec{F}_{ext}\right) = m.\vec{a}_G$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة المتجهة على محور المعلم : $(O,\vec{i})$: $\vec{P}_x + \vec{R}_x + \vec{T}_x = m\vec{a}$

$$mg\sin\alpha + 0 - k(\Delta l_0 + x) = m\ddot{x}$$

$$\underbrace{mg.\sin\alpha - k\Delta l_0}_{\text{عندالتوازن } = 0} - kx = m\ddot{x}$$

المعادلة التفاضلية للحركة : $m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

2 – 2 بما أن المعادلة من الدرجة الثانية فإن حلها عبارة عن دالة جيبية تكتب على شكل : $x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

لدينا : $x_m = 3cm$

و حسب الشروط البدئية :
$$x(t=0)=x_m\cos(\varphi)=1{,}5$$

$$\cos\varphi=\frac{1{,}5}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\qquad\Rightarrow\qquad\varphi=\pm\frac{\pi}{3}$$

بما أن الجسم (S) يمر عن اللحظة $t=0$ في المنحى الموجب فإن : $\varphi>0$

$$x(t)=x_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

$$\dot{x}(t)=-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)x_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

$$\dot{x}(t=0)=-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)x_m\sin(\varphi)>0$$

أي : $\sin\varphi<0$ ومنه فإن : $\boxed{\varphi=-\frac{\pi}{3}}$

وبالتالي المعادلة الزمنية :
$$x(t=0)=x_m\cos(\varphi)=1{,}5$$

$$x(t)=3.10^{-2}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t-\frac{\pi}{3}\right)$$

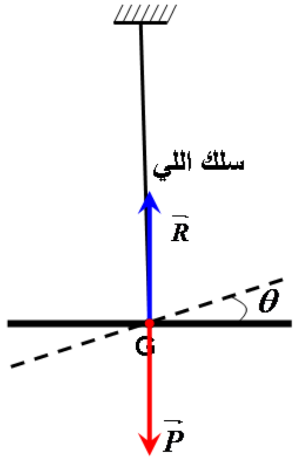
2 – 3 الدور الخاص T_0 :

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\sqrt{\frac{k}{m}}\qquad\Rightarrow\qquad T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T_0=2\times3{,}14\times\sqrt{\frac{0{,}1}{2{,}13}}\qquad\Rightarrow\qquad\boxed{T_0=1{,}36s}$$

❖ **تطبيق : نواس اللي**

يمثل الشكل التالي سلكا فولاذيا رأسيا ثابتة ليه $C=0{,}65N.m/rad$ مثبتا من طرفه السفلي بمركز قصور قضيب متجانس عزم قصوره بالنسبة لمحور الدوران J_Δ :



ندير القضيب أفقيا بزاوية $\theta_m = \pm\frac{\pi}{4}$ ثم نحرره بدون سرعة بدئية فتصبح له حركة تذبذبية في غياب الاحتكاكات تبقى الذبذبات مصونة فينجز 20 ذبذبة خلال 24 ثانية.

علما أنه عند اللحظة $t=0$ يمر من الموضع المعلم بالزاوية $\theta = +\frac{\pi}{8}$ في المنحى الموجب.

1 – أوجد المعادلة التفاضلية لحركة القضيب و بين أن حركة دورانية جيبية ؟

2 – أحسب الدور الخاص T_0 لهذا المتذبذب الميكانيكي ؟

3 – أوجد تعبير عزم القصور J_Δ للقضيب بدلالة T_0 و C ثم أحسب قيمته ؟

4 – أوجد المعادلة الزمنية للحركة ؟

1 – المجموعة المدروسة : {القضيب}

جرد القوى المطبقة على القضيب

$\vec{P}$: وزن القضيب

$\vec{R}$: تأثير محور الدوران (Δ)

$\mathcal{M}_C$: عزم مزدوجة اللي : $\mathcal{M}_C = -C\theta$

بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك في حالة دوران :

$$\sum \mathcal{M}\left(\vec{F}_{ext}\right) = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_C = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

لأن تأثيرهما يتقاطع مع محور الدوران :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$$

وبالتالي :

$$-C.\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

المعادلة التفاضلية للحركة التذبذبية لنواس اللي :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}.\theta = 0}$$

حلها عبارة عن دالة جيبية :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$$

إذن طبيعة الحركة دورانية جيبية.

2 – لدينا $20T_0 = 24s$ و

$$\boxed{T_0 = \frac{24}{20} = 1{,}2s}$$

3 – لينا

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{C}{J_\Delta}$$

$$J_\Delta = \frac{T_0^2.C}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{C}{J_\Delta}$$

$$J_\Delta = \frac{(1{,}2)^2 \times 0{,}65}{4 \times (3{,}14)^2} = 23{,}7.10^{-3}\,kg.m^2$$

4 – المعادلة الزمنية :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\theta_m = +\frac{\pi}{4}$$

$$\theta(t=0) = \theta_m \cos\varphi = \frac{\pi}{8} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\varphi = \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}\times\frac{4}{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

بما أن القضيب يمر عند اللحظة $t=0$ في المنحى الموجب $v>0$

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

$$\dot{\theta}(t=0) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\theta_m \sin(\varphi) > 0$$

ومنه فإن $\sin\varphi < 0$ أي $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ $\boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{4}\cos\left(5{,}24t-\frac{\pi}{3}\right)}$

المعجم العلمي

نابض	Ressort	حامل	Support
سحمة	Masselotte	ذبذبة	Oscillation
دوري	Périodique	معلاق	Suspension
وازن	Pesant	بسيط	Simple
مرن	Elastique	ساق	Tige
ارتداد	Rappel	لي	Torsion
مزدوجة	Couple	مستقر	Stable
موضع	Position	توازن	Equilibre
وسع	Amplitude	موجه	Orienté
خاص	Propre	خمود	Amortissement
احتكاك	Frottement	نظام	Régime
ضعيف	Faible	حاد	Fort
صيانة	Entretien	حرج	Critique
اهتزاز	Vibration	مماثلة	Analogue
مثير	Excitateur	رنان	Résonateur
مصونة	Entretenu	رنين	Résonance